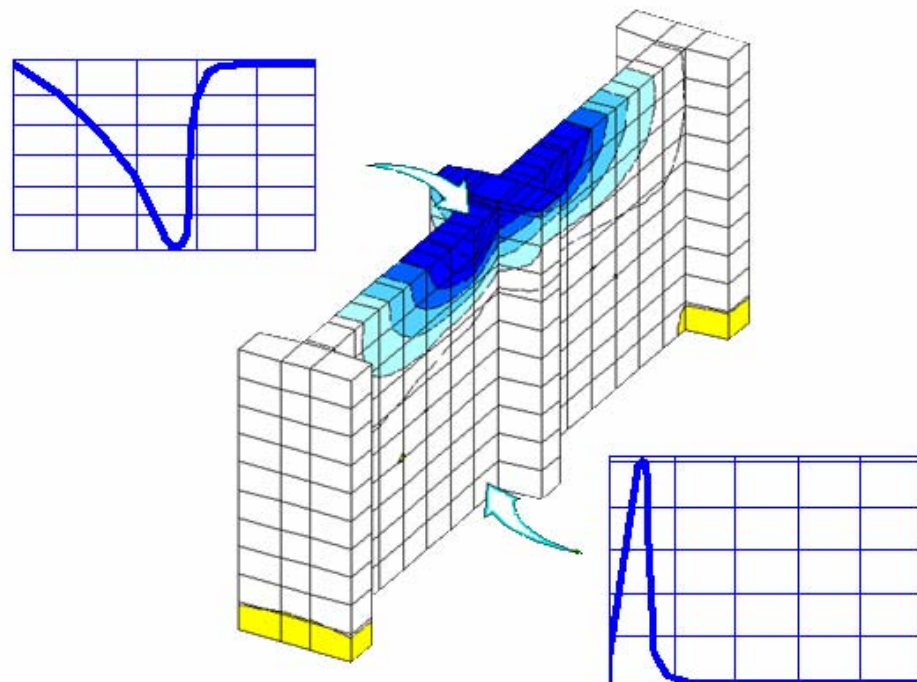


С.Ф. Клованич

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ
В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ
ИНЖЕНЕРНОЙ МЕХАНИКИ**



Запорожье - 2009

ББК 38.53
УДК 624.012.45.04: 539.3

Клованич С.Ф.

Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики/ Клованич С.Ф.-
Запорожье: Издательство журнала “Світ геотехніки”, 2009. – 400 с.

В книге излагаются основы метода конечных элементов применительно к нелинейным задачам. Приводятся соотношения для стандартных конечных элементов, включая плоские, осесимметричные, объемные, стержневые, плитные и оболочечные. Формулируется целый класс нестандартных элементов, характерных для нелинейных задач. Анализируются нелинейные модели таких материалов, как бетон и железобетон, грунты, как в виде ассоциированных и неассоциированных теорий течения, так и в форме деформационных теорий. Дается подробное описание программного комплекса, ориентированного на решение нелинейных задач методом конечных элементов с использованием шагово-итерационных процедур. Рассматриваются не только вычислительные алгоритмы, положенные в основу комплекса, но также и алгоритмы, используемые в сервисной части и предназначенные как для графического ввода исходных данных, так и для визуализации результатов расчета. Большая часть теоретического материала сопровождается численными алгоритмами в виде исходных текстов программ на Фортране и Си. Приводятся наглядные примеры решения нелинейных задач из самых разнообразных технических и геотехнических приложений.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся расчетами и проектированием сооружений, а также для преподавателей, аспирантов и студентов вузов строительных и гидротехнических специальностей.

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор А.С. Городецкий
д-р техн. наук, профессор А.Ф. Яременко
д-р техн. наук, профессор А.В. Школа

ISBN 5-7707-6337-X

© С.Ф. Клованич

ОТ АВТОРА

Появлению данной книги предшествовали вполне обоснованные сомнения в ее целесообразности. О методе конечных элементов, о его теоретических основах, программной реализации и технических приложениях написано уже достаточно много. Выход в свет еще одной монографии на эту тему мог вызвать у читателя подозрения о том, что автором владеет “писательский зуд” и желание лишней раз напомнить о себе. Однако, обладая достаточной информацией по данной проблеме, автор пришел к выводу, что, как это ни парадоксально, книг по методу конечных элементов, рассчитанных на читателей с хорошей инженерной подготовкой, не так уж и много. Большинство из них ориентировано либо на начинающих, либо на узкий круг специалистов, как правило, с математическим образованием. Более того, наметился разрыв между теоретическими основами метода и его программной реализацией. Основной упор в настоящее время делается именно на последнем аспекте и большинство усилий исследователей уходят на борьбу с “проклятием размерности”, как с точки зрения чисто вычислительной, так и при генерации расчетных схем и графической интерпретации результатов расчетов в линейно-упругой постановке. Между тем, большая часть инженерных задач нелинейна по своей природе. В то же время для численного описания нелинейного поведения материалов и конструкций давно уже созданы хорошие предпосылки. Имеется целый ряд теорий, предназначенных как для моделирования физической нелинейности конструкционных материалов, так и для описания геометрической нелинейности. Поэтому, после длительных раздумий, автор, убедил себя в том, что данная книга, в которой приводятся сведения о современном состоянии МКЭ, ориентированном на решение нелинейных задач, часто возникающих в инженерной практике, будет весьма кстати. Кроме того, автор старался отклониться от традиционных форм изложения многих вопросов, пытаясь высказать собственные суждения по ним, опираясь на более чем тридцатилетний педагогический, инженерный и программистский опыт, а также на знания, которые получил от своих учителей профессоров Карпенко Николая Ивановича, Бидного Григория Рафаиловича, Колчина Глеба Борисовича, о которых всегда вспоминает с теплотой и благодарностью. Автор выражает свою признательность также профессорам Городецкому Александру Сергеевичу, Яременко Александру Федоровичу, Школе Александру Викторовичу за постоянную моральную поддержку, ряд ценных замечания и пожеланий. Ну и особо хочу поблагодарить руководство компании «Трансинвестсервис» в лице Ставнищера Алексея Михайловича и Котвицкого Виталия Болеславовича, а также директора Запорожского филиала НИИСК к.т.н. Шокарева Виктора Семеновича, без энергичных усилий и поддержки которых эта книга вряд ли была бы опубликована.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В строительной механике, как науке о прочности и жесткости деформируемых твердых тел, прочно обосновался и в настоящее время занимает лидирующее положение один из численных методов анализа напряженно-деформированного состояния конструкций различного класса и назначения. Речь, безусловно, идет о методе конечных элементов (МКЭ), основные идеи которого были заложены Р.Курантом еще в 50-е годы. Конечно же, с тех пор МКЭ существенно изменился, получил солидное теоретическое обоснование и развитие, о чем свидетельствуют многочисленные, не поддающиеся учету публикации. Более того, одновременно с самим методом, развивались и средства вычислений, а также средства разработки программного обеспечения, без которых невозможна реализация МКЭ. Это привело к тому, что возможности программных комплексов, реализующих метод конечных элементов на современных компьютерах, кажутся, на первый взгляд, поистине неисчерпаемы. В настоящее время МКЭ используется практически во всех инженерных расчетах на прочность, жесткость и устойчивость в самых различных областях техники. Причин такого положения несколько.

Во-первых, для МКЭ характерна четкая, физически наглядная механическая интерпретация основных идей, многие из которых в том или ином виде ранее использовались в инженерных расчетах. Его можно рассматривать как известное обобщение классических методов строительной механики, хорошо знакомых специалистам, работающим в области прочности конструкций.

Во-вторых, МКЭ по своей математической сущности совпадает с широко известными вариационными методами решения задач механики деформируемых тел и его можно интерпретировать как своеобразную разновидность вариационно-разностных методов. Это создало основу для строгого математического обоснования МКЭ и решения таких принципиальных вопросов, как сходимостъ и точностъ.

В-третьих, снят имеющийся еще недавно технический и психологический барьер, обусловленный ограниченными возможностями средств вычислений. В большинстве случаев инженера уже не смущает размерность решаемых задач, более того иногда он об этом и не задумывается. Расчетные схемы сооружений внешне все больше приобретают черты реального объекта, ясно, что за счет все большей их детализации, увеличения числа разбиений, совмещения в одной схеме конечных элементов различных типов.

Однако разработка конечноэлементного программного обеспечения все больше становится делом узкого круга специалистов, в основном, программистов, с хорошей математической подготовкой. Значительная часть инженеров – пользователей программных продуктов удалена от этого процесса, применяет их формально, положив в основу своей деятельности многочисленные инструкции и руководства пользователя. Как правило, эта часть пользователей, не всегда хорошо понимает не только специфику компьютерного моделирования, но и суть МКЭ, его механико-

математические основы, позволяющие осознанно анализировать результаты вычислений и принимать грамотные инженерные решения. Лишь некоторая часть инженеров в достаточной мере владеют азами МКЭ, особенностями его программной реализации, что позволяет им не допускать ошибок при интерпретации результатов расчетов и при проектировании. Как правило, эта часть пользователей достаточно амбициозна, чтобы ставить сложные проектные задачи, не ограничивая себя рамками стандартных решений, предоставляемых существующими программными комплексами. Все чаще их интересует технологические аспекты проектирования, как будет вести себя сооружение в процессе возведения или, если необходимо, демонтажа, как реально взаимодействуют между собой его части, резервы несущей способности, характер и развитие трещин в железобетоне, развитие деформаций во времени, возможность изменения граничных условий и нагрузок в процессе эксплуатации и т.д. На большинство из подобного рода задач, как правило, нельзя найти ответы в рамках стандартных промышленных программных комплексов на основе линейно-упругих расчетов сооружений при идеальных связях и нагрузках с использованием принципа суперпозиции. Все эти задачи относятся к классу нелинейных. Однако, несмотря на различные причины нелинейности поведения конструкций, все-таки, основным ее источником является нелинейность материалов, под которой понимают непропорциональность зависимостей между напряжениями и деформациями. Эти зависимости для различных материалов разные и, если при одноосном напряженном состоянии их можно установить непосредственно из экспериментов на контрольных образцах, то в случае сложных, двух- и трехосного напряженных состояний необходимо располагать соответствующей моделью прочности и деформирования. Эта модель должна отвечать следующим требованиям. Во-первых, по словам крупнейшего специалиста в области численных методов Дж.Аргироза, “какой бы подход не использовался в расчете, важно понять, что отделение теоретических основ метода от машинной реализации было бы огромной ошибкой. ЭВМ должна определять теорию метода”. То есть, необходимо, прежде всего, чтобы модель учитывала особенности компьютерной реализации МКЭ. Во-вторых, она должна отражать, по возможности, всю специфику деформирования того или иного материала. В-третьих, желательно, чтобы количество исходных параметров модели было бы минимальным и они могли бы быть получены из стандартных испытаний контрольных образцов, либо по данным нормативных источников. Кроме того, учитывая известную условность при назначении расчетных нагрузок и условий закреплений, неоднородность материалов, точность самого МКЭ, нет необходимости чрезмерно усложнять модель, пытаясь учесть в ней как можно больше факторов, в том числе и второстепенных. Точность ее должна находиться в пределах точности исходных предпосылок. Нельзя допустить, чтобы она была чересчур громоздкой, модель должна иметь очевидный механический смысл, контролируемый и инженерно-обозримый вид. При таком подходе естественным представляется феноменологический анализ наиболее общих свойств материалов, основанный на целенаправленной обработке имеющихся экспериментальных данных.

Все вышеперечисленное определяет содержание данной книги.

В первой главе приводятся общие теоретические предпосылки метода конечных элементов в объеме, необходимом для понимания содержания остальных глав.

Во второй главе описываются основы МКЭ как численного метода анализа конструкций, дается вывод общих зависимостей, разрешающих уравнений, формулируются принципы решения нелинейных и динамических задач.

В третьей и четвертой главах выводятся основные соотношения для стандартных плоских и объемных конечных элементов различных порядков, строятся их матрицы жесткости и вектора узловых сил. Приводятся исходные тексты необходимых для этого подпрограмм.

В пятой главе с единых методических позиций излагаются особенности конечноэлементного анализа изгибаемых систем, таких как тонкие плиты и оболочки, плоские и пространственные стержневые системы. Матрицы для изгибаемых конечных элементов строятся на базе кинематических гипотез. Приводятся тексты программ, реализующие алгоритмы получения матриц жесткости элементов.

Шестая глава посвящена нелинейным деформационным анизотропным моделям бетона и железобетона, как основного конструкционного материала. В основу исследований положена хорошо зарекомендовавшая себя ортотропная модель, условия прочности, диаграммы деформирования бетона. Рассматриваются две стадии работы железобетона – без трещин и с трещинами в бетоне.

В седьмой главе излагаются основы современной изотропной теории пластичности материалов, как в форме ассоциированной и неассоциированной теорий течения, так и в деформационном виде. Подробно описываются особенности этих теорий применительно к бетонам и грунтам.

Восьмая глава посвящена построению нестандартных конечных элементов, с помощью которых моделируются некоторые нелинейные процессы, такие как контактное трение, полубесконечные границы, дается описание неоднородных элементов, отдельные части которых состоят из разных материалов, элементов толстых оболочек, состояние которых определяется всеми шестью компонентами напряжений.

В девятой главе описываются основные принципы построения конечноэлементных программ. При этом рассматриваются два аспекта проблемы. Первый из них чисто вычислительный, связанный с реализацией самого метода конечных элементов, включая построение матриц для элементов, учет граничных условий, формирование систем уравнений. Здесь особое внимание уделяется эффективным методам решения этих систем. Приводятся тексты программ. Второй аспект проблемы связан с подготовкой исходных данных и графической интерпретации результатов. Материал изложения сопровождается также исходными текстами программ. Дается краткое описание программного комплекса для решения нелинейных задач.

Десятая глава посвящена наглядным примерам нелинейных расчетов для самых разнообразных конструкций и систем. Здесь же обосновывается достоверность и эффективность нелинейных моделей сопоставлением расчетных данных с данными экспериментальных исследований. Постановка и методы решения некоторых задач являются оригинальными.

Чтобы облегчить чтение книги, дается приложение, в котором кратко излагаются сведения из наиболее необходимых разделов математики – матричной и векторной алгебры, вариационного исчисления, решения систем нелинейных уравнений, интерполяции и численного интегрирования.

В книге использовались материалы кандидатских диссертации Мироненко И.Н. (пп. 7.1, 7.2, 8.2, 10.1.1-10.1.3) и Безушко Д.И. (пп. 6.2, 7.4.1, 7.4.2, 8.1, 10.2.3, 10.2.4), Шеховцова В.И. (п.10.2.9), выполненных под руководством автора.

Предназначена для преподавателей, аспирантов и студентов вузов строительных и гидротехнических специальностей, а также для специалистов, занимающихся расчетами и проектированием сооружений.

ГЛАВА 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ

1.1. Расчет конструкций – задача механики деформируемого твердого тела

1.1.1. Задача механики деформируемого твердого тела формулируется следующим образом: известны (заданы) внешние воздействия на тело, так или иначе закрепленное или движущееся в пространстве, как функции координат и времени. Необходимо найти некоторые системы функций координат и времени, описывающие состояние этого тела. Под внешним воздействием обычно понимают силовые, температурные и другие воздействия. В систему искомых функций входят, как правило, компоненты вектора смещения, а также векторов деформаций и напряжений. Процедура определения указанных функций применительно к инженерным задачам называется расчетом конструкции.

Термин «расчет», широко распространенный в инженерной практике, может употребляться в различных значениях. В данной книге под расчетом будем понимать математическую процедуру, результатом которой является вычисление характеристик напряженно-деформированного состояния конструкции на основе решения уравнений, соответствующих выбранной расчетной схеме.

Такая формулировка, по существу, означает, что речь идет о решении некоторой задачи, т.е. о необходимости сознательного поиска соответствующего средства для достижения видимой, но непосредственно недоступной цели. Решение означает нахождение этого средства [10].

1.1.2. С математической точки зрения расчет конструкции сводится к решению краевых задач для систем уравнений, включающих соотношения теории напряжений и деформаций (уравнения равновесия, уравнения совместности, соотношения между перемещениями и деформациями), а также определяющие уравнения, т.е. связь между напряжениями и деформациями.

Система искомых функций состоит из компонент вектора перемещений $\{u\} = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\}$, а также компонент векторов напряжений $\{\sigma\} = \{\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z)\}$ и деформаций $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z), \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z)\}$.

Эти функции определяются из совместного решения систем уравнений, включающих:

уравнения равновесия

$$[\Phi]^T \{\sigma\} = \{G_v\} ; \quad (1.1)$$

геометрические уравнения (Коши)

$$\{\varepsilon\} = [\Phi]\{u\}; \quad (1.2)$$

определяющие (физические) уравнения

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (1.3)$$

где $[\Phi]$ - матрица дифференциальных операторов

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

$\{G_v\} = \{X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)\}$ - вектор-функция объемных сил;

$[D]$ - матрица механических характеристик материала размером 6×6 .

Отметим, что матрица $[D]$ в соотношении (1.3) определяется выбором модели материала и для физически нелинейных материалов формулируются на базе физических уравнений, учитывающих его основные свойства. Для упругого изотропного материала она равна

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

симметрично

где E - модуль упругости материала; ν - коэффициент Пуассона.

Уравнения (1.1)-(1.3) должны быть дополнены граничными условиями на поверхностях тела: S_1 - кинематическими и S_2 - статическими ($S_1 + S_2 = S$)

$$\{u\} = \{u_{s1}\}; \quad [N_o]\{\sigma\} = \{P_{s2}\}. \quad (1.6)$$

Здесь

$$[N_o] = \begin{bmatrix} \cos(n, x) & 0 & 0 & \cos(n, y) & 0 & \cos(n, z) \\ 0 & \cos(n, y) & 0 & \cos(n, x) & \cos(n, z) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n, z) & 0 & \cos(n, y) & \cos(n, x) \end{bmatrix}$$

- матрица направляющих косинусов нормали в точке поверхности.

В случае динамической задачи в правые части дифференциальных уравнений равновесия (1.1) будут входить инерционные силы, вектор-функция которых

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \{u\} = \rho \frac{d^2}{dt^2} \{u \ v \ w\} = \rho \{u\},$$

где ρ - плотность материала; t - время.

Решая совместно (1.1), (1.2) в (1.3), например, относительно неизвестных перемещений можно получить уравнение равновесия в перемещениях

$$[\Phi]^T [D] [\Phi] \{u\} = \{G_v\}.$$

1.1.3. Разрешающие уравнения (1.1) - (1.3) возможно существенно упростить для решения некоторых частных задач. Так, в случае осесимметричной задачи в цилиндрических координатах r, θ, z , где z -ось симметрии, когда напряженно-деформированное состояние не зависит от угла θ и характеризуется вектор-функциями $\{u\} = \{u(r, z)w(r, z)\}$, $\{\sigma\} = \{\sigma_r(r, z)\sigma_\theta(r, z)\sigma_z(r, z)\tau_{rz}(r, z)\}$ при заданных внешних воздействиях $\{G_v\} = \{R_v(r, z)Z_v(r, z)\}$, матрица характеристик $[D]$ будет иметь размерность 4x4 и, в частности, для упругого изотропного материала

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{симметрично} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Матрица дифференциальных операторов будет равна

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

1.1.4. Для плоской задачи в случае плоского напряженного или плоского деформированного состояния, когда $\{u\} = \{u(x, y)v(x, y)\}$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x(x, y)\varepsilon_y(x, y)\gamma_{xy}(x, y)\}$; $\{\sigma\} = \{\sigma_x(x, y)\sigma_y(x, y)\tau_{xy}(x, y)\}$, матрица $[D]$ имеет размерность 3x3 и для упругого изотропного материала равна

$$[D] = \frac{2G}{1-\nu'} \begin{bmatrix} 1 & \nu' & 0 \\ \nu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu'}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Здесь введены обозначения: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига; $\nu' = \nu$ - при плоском напряженном состоянии; $\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$ - при плоской деформации.

Матрица же $[\Phi]$ имеет вид

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Отметим, что при плоском напряженном состоянии $\sigma_z = 0$, но при этом появляются деформации и перемещения вдоль оси z

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

При плоской деформации в случае отсутствия перемещений вдоль оси z ($w = 0$) появляются напряжения $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

1.1.5. Несмотря на относительную простоту сформулированной задачи по расчету конструкций, лишь для ограниченного класса тел и нагрузок, совершенно недостаточных для технических приложений, их удастся проинтегрировать точно и

получить искомую систему функций перемещений, деформаций и напряжений. Обычно расчет разнообразных и сложных сооружений, распространенных в инженерной практике, связан с почти непреодолимыми математическими трудностями, поэтому, используют приближенные, как правило, численные методы. В большинстве современных приложений в качестве численного метода выбирается метод конечных элементов. Метод конечных элементов имеет энергетическую природу и его основные соотношения можно получить с использованием аппарата вариационного исчисления. Для этого необходимо предварительно сформулировать соответствующий вариационный принцип для рассматриваемой задачи, которому отвечает определенный функционал. Эти принципы носят энергетический характер, а функционалы связаны между собой общими энергетическими теоремами. Математические аспекты данной связи заложены в теории преобразования вариационных проблем, предложенной Р.Курантом и Д.Гильбертом [7].

Отметим, что из вариационных принципов можно получить также основные уравнения, характеризующие напряженно-деформированное состояние тела (уравнения равновесия и совместности деформаций, геометрические соотношения, а в ряде случаев и закон связи напряжений и деформаций).

1.2. Вариационные принципы механики

1.2.1. Энергетический характер вариационных принципов строительной механики естественным образом обуславливает необходимость рассмотрения работы внешних и внутренних сил при деформации системы.

Пусть имеется деформируемое тело в декартовой системе координат (рис. 1.1), определенным образом закрепленное в пространстве и находящееся в равновесии под действием системы сосредоточенных сил, вектор-столбец которых

$$\{\mathbf{P}\} = \left\{ \{\mathbf{P}\}^{(1)} \{\mathbf{P}\}^{(2)} \dots \{\mathbf{P}\}^{(k)} \dots \{\mathbf{P}\}^{(m)} \right\}, \quad (1.11)$$

где $\{\mathbf{P}\}^{(k)} = \left\{ \overline{P}_1^{(k)} \overline{P}_2^{(k)} \dots \overline{P}_r^{(k)} \right\}$ - вектор сил в точке k . Компонентами этого вектора являются силы, направленные соответственно вдоль осей $x(1)$, $y(2)$, $z(3)$, и моменты относительно этих же осей; m – число точек приложения сил; r – число степеней свободы в рассматриваемой точке (в данном случае $r \leq 6$).

Рассматривая $\{\mathbf{P}\}$ как обобщенную силу, введем соответствующее ей обобщенное перемещение

$$\{\mathbf{q}\} = \left\{ \{\mathbf{q}\}^{(1)} \{\mathbf{q}\}^{(2)} \dots \{\mathbf{q}\}^{(k)} \dots \{\mathbf{q}\}^{(m)} \right\},$$

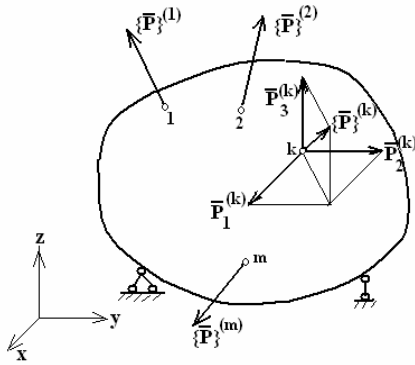


Рис.1.1. Деформируемое тело.

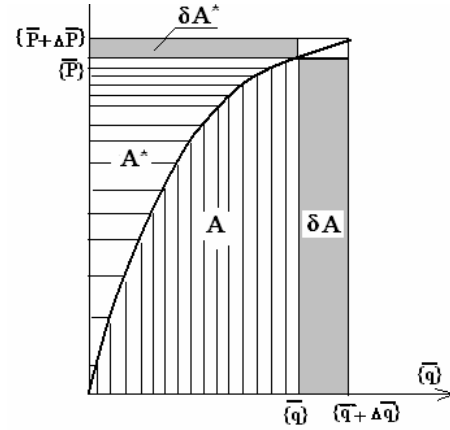


Рис.1.2. Действительная и возможная работа.

где $\{\bar{q}\}^{(k)} = \{\bar{q}_1^{(k)} \bar{q}_2^{(k)} \dots \bar{q}_r^{(k)}\}$ - вектор перемещений в k -м узле, содержащий линейные и угловые перемещения соответственно по направлению и относительно осей $x(1), y(2), z(3)$.

Обобщенная связь между векторами $\{\bar{q}\}$ и $\{\bar{P}\}$ для нелинейно деформируемых систем в условиях активного нагружения представлена на рис. 1.2 в виде условного графика. Силы $\{\bar{P}\}$ на перемещениях $\{\bar{q}\}$ совершают, так называемую, действительную работу, равную площади вертикально заштрихованного криволинейного треугольника и определяемую по формуле

$$A = \int_0^{\{\bar{q}\}} \{\bar{P}\}^T \{d\bar{q}\}. \quad (1.12)$$

Если зависимость между векторами $\{\bar{q}\}$ и $\{\bar{P}\}$ на рис.1.2 линейна, то из (1.12) следует известная теорема Клапейрона для упругих систем

$$A = \frac{1}{2} \{\bar{P}\}^T \{\bar{q}\} = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T \{\bar{P}\}.$$

1.2.2 Предположим, что сила $\{\bar{P}\}$ получила приращение $\{\Delta\bar{P}\}$ (рис.1.2), которое вызвало приращение перемещения $\{\Delta\bar{q}\}$. Тогда приращение работы

$$\Delta A = \int_{\{\bar{q}\}}^{\{\bar{q}+\Delta\bar{q}\}} \{\bar{P}\}^T \{d\bar{q}\}. \quad (1.13)$$

Главная часть этого приращения, отнесенная на рис.1.2, называется вариацией работы внешних сил $\{\bar{P}\}$

$$\delta A = \{\bar{P}\}^T \{\delta\bar{q}\} = \{\delta\bar{q}\}^T \{\bar{P}\}. \quad (1.14)$$

Из рис.1.2 видно, что величину δA можно рассматривать как работу внешних сил на изменениях перемещений, не связанных с изменением внешней нагрузки. Эти изменения перемещений, совместимые с кинематическими граничными условиями и являющиеся непрерывными функциями координат, называются возможными. Таким образом, δA естественно представить как возможную работу, т.е. работу внешних сил на возможных изменениях перемещений.

Если кроме сосредоточенных сил $\{\bar{P}\}$ на тело действуют также объемные и поверхностные силы заданной интенсивности, то возможная работа будет равна

$$\delta A = \{\delta \bar{q}\}^T \{\bar{P}\} + \iiint_V \{\delta u\}^T \{G_V\} dV + \iint_{S_2} \{\delta u\}^T \{p_S\} dS, \quad (1.15)$$

где S_2 – часть поверхности, на которой заданы распределенные нагрузки $\{p_S\}$. Очевидно, что на части поверхности $S_1 = S - S_2$, где заданы перемещения, $\{\delta u\} = 0$.

1.2.3. Когда на деформируемое тело действует внешняя нагрузка $\{\bar{P}\}$, работу совершают не только внешние (1.12), но и внутренние силы, развивающиеся в теле. Эта работа всегда отрицательна, так как внутренние силы противодействуют деформации, вызываемой внешней нагрузкой. При этом в единице объема тела в качестве внутренних сил будут выступать напряжения $\{\sigma\}$, а перемещений – деформации $\{\varepsilon\}$. Тогда действительная работа внутренних сил будет равна

$$W = -\iiint_V \left(\int_0^{\{\varepsilon\}} \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\} \right) dV, \quad (1.16)$$

где интегрирование ведется как по объему V , так и по пути деформирования. Эта работа всегда отрицательна, так как внутренние силы противодействуют деформации, вызываемой внешней нагрузкой.

Если система линейна, то в соответствии с теоремой Клапейрона

$$W = -\frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV.$$

При возможном перемещении внутренние “действительные” силы совершают возможную работу, которая, по аналогии с выражением (1.14), может быть определена так

$$\delta W = -\iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (1.17)$$

где $\{\delta \varepsilon\} = \{\delta \varepsilon_x \delta \varepsilon_y \delta \varepsilon_z \delta \tau_{xy} \delta \tau_{yz} \delta \tau_{xz}\}$ – деформации, вызванные возможными перемещениями точек тела или возможные деформации.

Другое название выражения (1.17) – вариация работы внутренних сил.

Отметим, что действительная работа внутренних сил W является мерой энергии, запасаемой в материале при деформировании. Взятая с обратным знаком, она равна потенциальной энергии деформации $U = -W$. При снятии нагрузки часть этой энергии расходуется на восстановление формы тела, другая же часть поглощается внутренним трением в материале. Кстати, форма упругого тела, при отсутствии внутреннего трения, при разгрузке восстанавливается полностью. Вариация потенциальной энергии

$$\delta U = -\delta W = \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \iiint_V \delta U_o dV = \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \frac{\delta U_o}{\{\delta \varepsilon\}} dV,$$

откуда следует известная формула Грина

$$\{\sigma\} = \frac{dU_o}{d\{\varepsilon\}}. \quad (1.18)$$

Здесь U_o - энергия, накапливаемая при деформации в единице объема, выделенного в окрестности данной точки, называемая удельной потенциальной энергией деформации или потенциалом деформаций.

1.2.4. Одним из наиболее общих вариационных принципов строительной механики является принцип возможных перемещений, сформулированный Лагранжем. Профессор И.М. Рабинович писал, что “эта концепция была подлинным источником живой воды для всей строительной механики, она придала всем выводам последней небывалую универсальность, небывалую широту и силу” [12]. Принцип возможных перемещений для любой деформируемой системы может быть сформулирован следующим образом: реальное равновесное состояние системы под действием приложенных к ней внешних сил характеризуется тем, что сумма возможных работ всех внешних и внутренних сил на всяких кинематически возможных изменениях перемещений точек системы равна нулю, т.е.

$$\delta A + \delta W = 0. \quad (1.19)$$

С учетом (1.15) и (1.17) принцип возможных перемещений формулируется так

$$\iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{\delta \bar{q}\}^T \{P\} - \iiint_V \{\delta u\}^T \{G_V\} dV - \iint_{S_2} \{\delta u\}^T \{p_S\} dS = 0. \quad (1.20)$$

Вынося в выражении (1.19) знак вариации за скобки, принцип возможных перемещений запишем в виде

$$\delta(A + W) = \delta \mathcal{E} = 0, \quad (1.21)$$

где функционал

$$\mathcal{E} = A + W \quad (1.22)$$

представляет собой полную энергию системы и называется функционалом Лагранжа.

Из (1.21) следует, что равновесию системы под действием внешних сил соответствует то ее состояние, при котором полная энергия системы принимает стационарное значение. Согласно принципу Дирихле [13] это стационарное значение есть минимум.

Необходимо особо подчеркнуть тот факт, что принцип возможных перемещений можно распространить и на малые конечные перемещения точек деформируемой системы.

1.2.5. Величина A^* , дополняющая значение A (рис.1.2) до площади прямоугольника, называется дополнительной работой внешней силы $\{\bar{P}\}$ и определяется следующим образом

$$A^* = \{\bar{P}\}^T \{\bar{q}\} - A. \quad (1.23)$$

Величина W^* численно равна площади вертикально заштрихованного криволинейного треугольника на рис.1.2.

Введенное понятие дополнительной работы, хотя и не имеет физического смысла, играет существенную роль при построении вариационных принципов. Очевидно, что

$$A^* = \int_0^{\{\bar{P}\}} \{\bar{q}\}^T \{d\bar{P}\}. \quad (1.24)$$

Для линейно-упругого тела

$$A^* = A = \frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T \{\bar{P}\}.$$

Вариацию дополнительной работы A^* при изменении внешней нагрузки запишем в виде

$$\delta A^* = \{\bar{q}\}^T \{\delta \bar{P}\}. \quad (1.25)$$

В случае действия на тело объемных и поверхностных сил заданной интенсивности вариация дополнительной работы

$$\delta A^* = \iiint_V \{u\}^T \{\delta G_V\} dV + \iint_{S_I} \{u_S\}^T \{\delta p_S\} dS. \quad (1.26)$$

Здесь S_I – та часть поверхности, где заданы перемещения, поскольку на остальной части поверхности $\{\delta p_S\} = \{0\}$.

Соотношения (1.24) и (1.25) можно было бы получить, рассматривая работу изменений сил на действительных перемещениях. Такие изменения внешней нагрузки, удовлетворяющие уравнениям равновесия, называются статически возможными.

Дополнительная работа внутренних сил равна

$$W^* = -\iiint_V \left(\int_0^{\{\sigma\}} \{\varepsilon\}^T \{d\sigma\} \right) dV, \quad (1.27)$$

а ее вариация имеет вид

$$\delta W^* = -\iiint_V \{\delta\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV. \quad (1.28)$$

Выражение (1.28) можно рассматривать также как работу статически возможных изменений напряжений $\{\delta\sigma\}$ на действительных деформациях $\{\varepsilon\}$.

Вариация дополнительной потенциальной энергии деформации U^* равна

$$\delta U^* = \iiint_V \{\delta\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \iiint_V \delta U_o^* dV = \iiint_V \{\delta\sigma\}^T \frac{\delta U_o^*}{\{\delta\varepsilon\}} dV. \quad (1.29)$$

Из выражения (1.29) следует известная формула Кастильяно

$$\{\varepsilon\} = \frac{dU^*}{d\{\sigma\}}. \quad (1.30)$$

Здесь U_o^* - удельная дополнительная энергия.

1.2.6. Другим важнейшим энергетическим принципом механики деформируемых сред является принцип Кастильяно, или начало возможных изменений напряженного состояния, который формулируется следующим образом: если деформация системы согласована со всеми имеющимися внутренними и внешними связями, т.е. если соблюдена совместность деформации системы, то сумма возможных работ, производимых возможными изменениями всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях системы (вызванных самими статически действующими силами), равна нулю [13,16], т.е.

$$\delta A^* + \delta W^* = 0. \quad (1.31)$$

Принцип возможных изменений напряженного состояния можно записать следующим образом

$$\delta(A^* + W^*) = \delta \mathcal{E}^* = 0, \quad (1.32)$$

где

$$\mathcal{E}^* = A^* + W^* \quad (1.33)$$

- функционал, представляющий собой полную дополнительную энергию системы и называется функционалом Кастильяно.

Из (1.32) следует, что из всех статически возможных напряженных состояний имеет место лишь то, при котором полная дополнительная энергия системы (1.21) принимает стационарное значение. В [13] показано, что это стационарное значение есть минимум. Особое значение для теории деформируемых сред имеет тот факт, что принцип возможных изменений напряженного состояния справедлив и при малых конечных вариациях внешних и внутренних сил.

1.2.7. Хотя функционалы (1.22) и (1.33) и имеют внешнее сходство, но, тем не менее, они принципиально различны. В выражении (1.22) варьируются параметры деформируемого состояния, тогда как напряженное состояние системы, вызванное воздействием внешней нагрузки, остается неизменным. При использовании выражения (1.33) варьируется напряженное состояние системы, в то время как деформируемое состояние остается постоянным.

Отметим также, что оба вариационных принципа действительны и тогда, когда отсчет перемещений, напряжений и деформаций начинается не с нулевого, т.е. с ненагруженного состояния тела, а и в том случае, если исходным является деформированное состояние, при котором какая-то часть нагрузки уже действует на него. Последующая нагрузка рассматривается как приращение и вариационная задача формулируется для приращений перемещений, напряжений и деформаций. Другими словами, если нелинейная задача решается шаговым методом, то в пределах каждого шага допускается использование вариационных формулировок.

1.2.8. Функционалы (1.22) и (1.33) могут быть сведены (см. П.2.4) к эквивалентным дифференциальным уравнениям Эйлера, которые в данном случае представляют собой лишь часть уравнений теории упругости (1.1)-(1.3). Так, при использовании функционала (1.22) получаются дифференциальные уравнения равновесия и соответствующие им статические граничные условия (1.6). Если же варьируется функционал (1.33), то в качестве уравнений Эйлера получаются геометрические соотношения (1.2) и кинематические граничные условия (1.6). Как видно, в обоих случаях не удается получить полный комплект уравнений теории упругости. Недостающие уравнения образуют дополнительные условия, которые связывают варьируемые параметры между собой. Заметим, что эти дополнительные условия должны быть удовлетворены предварительно еще до варьирования функционалов [1]. Так, удовлетворяя физическим и геометрическим соотношениям, функционал Лагранжа (1.22) можно привести к виду

$$\mathcal{E}(\{u\}) = \iiint_V \left[\int_{\{u\}} (\{\Phi\}\{u\})^T [D][\Phi] \{du\} - \{u\}^T \{G_V\} \right] dV - \iint_{S_2} \{u\}^T \{p_S\} dS. \quad (1.34)$$

Из выражения (1.34) следует, что принцип возможных перемещений можно сформулировать как вариационный, согласно которому истинные поля деформированного состояния упругого тела, удовлетворяющие дополнительным условиям, придают функционалу (1.22) минимальное значение, т.е.

$$\delta \mathfrak{A}(\{u\}) = 0. \quad (1.35)$$

Преобразуя (1.33) при помощи физических уравнений (1.3) и уравнений равновесия (1.1), функционал Кастильяно (1.33) приведем к виду

$$\mathfrak{A}^*(\{\sigma\}) = \iiint_V \left[\int_{\{\sigma\}} \{\sigma\}^T [D]^{-1} \{d\sigma\} - \int_{\{\sigma\}} \left([\Phi]^T \{\sigma\} \right)^T [\Phi [D]^{-1} \{d\sigma\}] \right] dV - \iint_{S_1} \{u_S\}^T [N_o] \{\sigma\} dS. \quad (1.36)$$

Отсюда, принцип возможных изменений напряженного состояния формулируется как задача отыскания компонент напряженного состояния, удовлетворяющих дополнительным условиям и сообщающих функционалу (1.36) минимальное значение, т.е.

$$\delta \mathfrak{A}^*(\{\sigma\}) = 0. \quad (1.37)$$

Таким образом, использование функционалов Лагранжа и Кастильяно сводит задачу теории упругости к несвободной вариационной задаче. Чтобы получить в качестве уравнений Эйлера и естественных граничных условий полный комплект статических, геометрических и физических уравнений с соответствующими граничными условиями, необходимо, очевидно, минимизировать такой функционал, у которого независимыми варьируемыми параметрами является совокупность всех величин, характеризующих напряженно-деформируемое состояние системы $\{\psi\} = \{\{\sigma\}\{\varepsilon\}\{u\}\}$, т.е. перейти от несвободной вариационной задачи с дополнительными условиями к свободной. Этот функционал, называемый полным, получается обычно в результате обобщения одного из частных функционалов (Лагранжа или Кастильяно) с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа в соответствии с теорией преобразования вариационных проблем Куранта и Гильберта [1,7].

1.2.9. Как уже отмечалось, располагая тем или иным функционалом, можно получить те или иные уравнения Эйлера, которые применительно к задачам строительной механики будут представлять собой уравнения равновесия, совместности деформаций и т.д.

Рассмотрим в качестве примера получение дифференциальных уравнений равновесия и статических граничных условий из вариационного принципа Лагранжа (1.20), который в развернутом виде с учетом (1.22) запишется таким образом

$$\delta \mathfrak{A}(\{u\}) = \iiint_V \left[\left([\Phi] \{\delta u\} \right)^T [D] [\Phi] \{u\} - \{\delta u\}^T \{G_V\} \right] dV - \iint_{S_2} \{\delta u\}^T \{p_S\} dS = 0$$

или

$$\delta \mathfrak{A}(\{u\}) = \iiint_V \{\delta u\}^T \left\{ [\Phi]^T [D] [\Phi] \{u\} + \{G_V\} \right\} dV - \iint_{S_2} \{\delta u\}^T \left\{ [N_o] [D] [\Phi] \{u\} - \{p_S\} \right\} dS = 0. \quad (1.38)$$

В силу произвольности вариации $\{\delta u\}$ из (1.38), исключая физические соотношения, получим

$$[\Phi]^T \{\sigma\} + \{G_V\} = 0; \quad [N_o]\{\sigma\} - \{p_S\} = 0.$$

Нетрудно видеть, что первое из этих матричных уравнений представляет собой искомые уравнения равновесия, второе – статические граничные условия. Другими словами, эти соотношения являются уравнениями Эйлера для функционала Лагранжа.

1.2.10. Располагая функционалами и соответствующими им вариационными принципами, представляется возможным использовать весь арсенал метода теории вариационного исчисления для решения задач строительной механики. При этом преимущество вариационной постановки задач объясняется не столько возможностью сведения ее к эквивалентным дифференциальным уравнениям Эйлера, решение которых приводится к большим математическим трудностям, сколько тем, что использование того или иного функционала предопределяет и методы непосредственного получения приближенного решения задачи. Эти методы, не связанные с переходом к дифференциальным уравнениям Эйлера, называются прямыми методами вариационного исчисления.

Для определенности остановимся на процедуре получения приближенного решения задачи теории упругости с помощью метода Ритца, согласно которому отыскиваются функции, удовлетворяющие граничным условиям и минимизирующие функционал Лагранжа (1.34).

С этой целью вначале представим искомое решение в виде аппроксимирующего ряда

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \varphi_{11}(x, y, z)\alpha_{11} + \varphi_{12}(x, y, z)\alpha_{12} + \dots + \varphi_{1k}(x, y, z)\alpha_{1k} + \dots; \\ v(x, y, z) &= \varphi_{21}(x, y, z)\alpha_{21} + \varphi_{22}(x, y, z)\alpha_{22} + \dots + \varphi_{2k}(x, y, z)\alpha_{2k} + \dots; \\ w(x, y, z) &= \varphi_{31}(x, y, z)\alpha_{31} + \varphi_{32}(x, y, z)\alpha_{32} + \dots + \varphi_{3k}(x, y, z)\alpha_{3k} + \dots, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \dots$ - заданные координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям; $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots$ - неопределенные коэффициенты, в качестве которых принимается совокупность параметров, характеризующих деформируемое состояние системы.

Выражение (1.39) перепишем в матричной форме

характера загрузки и граничных условий. Существуют различные приемы преодоления этих затруднений. Один из наиболее известных методов состоит в следующем.

Заданную область представляют набором конечного числа подобластей (элементов) относительно простой формы. Решение ищут с помощью того же соотношения (1.40), но записанного для каждой i -той подобласти в отдельности

$$\{u\}_i = [\varphi]_i \{\alpha\}_i. \quad (1.44)$$

Ясно, что в этом случае компонентами матрицы $[\varphi]_i$ являются относительно простые координатные функции, а элементами вектора $\{\alpha\}_i$ - параметры, характеризующие деформированное состояние i -го элемента.

Далее полагают, что объединение отдельных элементов в единое целое тождественно суммированию их энергий, т.е.

$$\mathfrak{E} = \sum \mathfrak{E}_i, \quad (1.45)$$

где \mathfrak{E}_i – функционал (1.34), записанный для i -й подобласти.

Тогда систему уравнений (1.42), минимизирующую функционал (1.41), можно формально переписать в виде

$$\frac{d\mathfrak{E}(\{\alpha\})}{d\{\alpha\}} = \sum \frac{d\mathfrak{E}_i}{d\{\alpha\}_i} = \sum ([K]_i \{\alpha\}_i + \{P\}_i) = 0. \quad (1.46)$$

Сравнивая (1.46) с (1.43), найдем

$$[K]\{\alpha\} = \sum [K]_i \{\alpha\}_i; \quad \{P\} = \sum \{P\}_i. \quad (1.47)$$

Решение системы (1.47) дает набор дискретных численных значений параметров α_k , с помощью которых, используя (1.44), можно через отдельные элементы описать состояние области в целом.

Сформулированная процедура является, по существу, вариационно-разностным методом решения задач о напряженно-деформированном состоянии континуума, основанном на его дискретном представлении. При этом следует отметить, что практическая реализация такого подхода, связанного с большим объемом вычислений, возможна лишь с применением современных компьютеров.

1.2.12. Важно отметить, что вариационные принципы справедливы не только для полных величин нагрузок, перемещений, напряжений и деформаций, но и для их приращений или скоростей, если задача рассматривается во времени [5]. Это позволяет без проблем применять их в тех нелинейных задачах, которые решаются шаговым методом в приращениях или в упругопластических задачах, когда используется теория течения.

1.3. Элементы теории напряжений и деформаций

1.3.1. Сразу подчеркнем, что сведения, изложенные в данном разделе, носят справочный характер, и ни в коей мере не претендуют на полноту изложения всех аспектов теории напряжений и деформаций. Детальное изложение данной теории можно встретить в большинстве учебников и справочников по механике деформируемого твердого тела, например [3,8,14,15,16].

Известно, что напряженное состояние деформируемого твердого тела в окрестности данной точки (далее – напряженное состояние в точке) характеризуется компонентами нормальных и касательных напряжений по граням бесконечно малого элемента в форме параллелепипеда. Ребра этого параллелепипеда ориентированы по направлению осей общей ортогональной системы координат x, y, z . Совокупность напряжений по граням образуют тензор напряжений, который может быть представлен следующей матрицей

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

Учитывая закон парности касательных напряжений, т.е. что $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, число независимых компонент тензора будет равно шести. В прикладной инженерной литературе совокупность независимых компонент тензора обычно представляется вектором напряжений $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}\}$. Такой способ представления принят и здесь.

Напряженное состояние в точке не зависит от того, в какой системе координат оно изучается. Вместо системы координат x, y, z можно использовать любую другую. При этом, хотя состояние тела в этой точке и не изменится, но значения компонент тензора будут другими. Однако, есть общие для любой системы координат параметры, однозначно характеризующие напряженное состояние в данной точке и не зависящие от преобразования координат. Эти параметры называются инвариантами. Как и любой тензор второго ранга [2], тензор напряжений имеет три инварианта, которые являются основными характеристиками напряженного состояния и определяются по следующим формулам [9]

$$\begin{aligned} I_1(T_{\sigma}) &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2(T_{\sigma}) &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2; \\ I_3(T_{\sigma}) &= \det \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

1.3.2. Тензор напряжений (1.48) может быть представлен в виде суммы

$$[T_{\sigma}] = [T_{\sigma_0}] + [D_{\sigma}], \quad (1.50)$$

в которой слагаемые имеют вид

$$[T_{\sigma_0}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}; \quad [D_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{bmatrix},$$

где $\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ - среднее напряжение.

Среднее напряжение характеризует равномерное растяжение-сжатие по всем направлениям, и вызывает только изменение объема элемента. Тензор $[T_{\sigma_0}]$, состоящий только из средних напряжений по диагонали, называется шаровым тензором. На долю второго тензора в соотношении (1.50) остается та часть напряжений, которые отвечают за изменение формы. Этот тензор $[D_{\sigma}]$ называется девиатором (от лат. “deviatio” – уклонение, искажение) напряжений.

Также как и тензор $[T_{\sigma}]$, его составляющие $[T_{\sigma_0}]$ и $[D_{\sigma}]$ являются тензорами второго ранга. Следовательно, каждый из них имеет по три инварианта. При этом инварианты шарового тензора напряжений равны

$$I_1(T_{\sigma_0}) = 3\sigma_0 = I_1(T_{\sigma}); \quad I_2(T_{\sigma_0}) = -3\sigma_0^2 = -\frac{1}{3}I_1^2(T_{\sigma}); \quad I_3(T_{\sigma_0}) = \sigma_0^3 = \frac{1}{27}I_1^3(T_{\sigma}). \quad (1.51)$$

Инварианты девиатора напряжений

$$I_1(D_{\sigma}) = s_x + s_y + s_z = 0;$$

$$I_2(D_{\sigma}) = -s_x s_y - s_y s_z - s_x s_z + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{xz}^2; \quad (1.52)$$

$$I_3(D_{\sigma}) = \det \begin{vmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{vmatrix} = s_x s_y s_z - s_x s_{yz}^2 - s_y s_{xz}^2 - s_z s_{xy}^2 - 2s_{xy} s_{yz} s_{xz}.$$

1.3.3. Компоненты тензора напряжений (не их инварианты) могут быть представлены в любой другой новой ортогональной системе координат x', y', z' , ориентированной по отношению к старой системе x, y, z посредством таблицы направляющих косинусов (рис.1.3). Связь между компонентами тензоров напряжений, представленных векторами напряжений в старой $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}\}$ и новой $\{\sigma'\} = \{\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ \tau'_{xy} \ \tau'_{yz} \ \tau'_{xz}\}$ системах координат в матричном виде осуществляется так

$$\{\sigma'\} = [m]\{\sigma\}, \quad (1.53)$$

где

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & m_{13}^2 & 2m_{11}m_{12} & 2m_{12}m_{13} & 2m_{11}m_{13} \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 & m_{23}^2 & 2m_{12}m_{22} & 2m_{22}m_{23} & 2m_{21}m_{23} \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & m_{33}^2 & 2m_{31}m_{32} & 2m_{32}m_{33} & 2m_{31}m_{33} \\ m_{11}m_{21} & m_{12}m_{32} & m_{13}m_{23} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & m_{12}m_{23} + m_{13}m_{22} & m_{11}m_{23} + m_{13}m_{21} \\ m_{21}m_{31} & m_{22}m_{32} & m_{23}m_{33} & m_{21}m_{32} + m_{22}m_{31} & m_{22}m_{33} + m_{23}m_{32} & m_{21}m_{33} + m_{23}m_{31} \\ m_{31}m_{11} & m_{32}m_{12} & m_{33}m_{13} & m_{11}m_{32} + m_{12}m_{31} & m_{12}m_{33} + m_{13}m_{32} & m_{11}m_{33} + m_{13}m_{31} \end{bmatrix}$$

	x	y	z
x'	m_{11}	m_{12}	m_{13}
y'	m_{21}	m_{22}	m_{23}
z'	m_{31}	m_{32}	m_{33}

Рис.1.3. Таблица направляющих косинусов

1.3.4. Существуют такие оси координат, в которых число ненулевых компонент тензора напряжений уменьшается до трех. Эти оси координат называются главными, а площадки, ориентированные по этим осям – главными площадками. По главным площадкам действуют только нормальные (главные) напряжения, а касательные напряжения равны нулю. Главные напряжения ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) являются действительными корнями кубического

уравнения [9]

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = \sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 - I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0. \quad (1.54)$$

Направляющие косинусы нормалей к главным площадкам m_{ci} ($c=1,2,3$; $i=x(1),y(2),z(3)$) определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_c)m_{c1} + \tau_{xy}m_{c2} + \tau_{xz}m_{c3} &= 0; \\ \tau_{xy}m_{c1} + (\sigma_y - \sigma_c)m_{c2} + \tau_{yz}m_{c3} &= 0; \\ \tau_{xz}m_{c1} + \tau_{yz}m_{c2} + (\sigma_z - \sigma_c)m_{c3} &= 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

с дополнительными условиями

$$m_{c1}^2 + m_{c2}^2 + m_{c3}^2 = 1. \quad (1.56)$$

Здесь σ_c ($c=1,2,3$) – каждый из трех корней уравнения (1.54).

Из (1.55) и (1.56) можно получить

$$m_{c1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + P_1^2 + P_2^2}}; \quad m_{c2} = P_1 \cdot m_{c1}; \quad m_{c3} = P_2 m_{c1},$$

где $P_1 = \frac{\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_z - \sigma_c)\tau_{xy}}{A_{c1}}; \quad P_2 = \frac{\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_z - \sigma_c)\tau_{xy}}{A_{c1}},$ и

$$A_{c1} = (\sigma_y - \sigma_c)(\sigma_z - \sigma_c) - \tau_{yz}^2 \neq 0.$$

В этих уравнениях принимается знак «плюс», если знаки напряжений σ_c и σ_i ($i=x,y,z$) совпадают и «минус» - в противном случае.

Если $A_{c1}=0$, следует вычислить ближайшую, не равную нулю, величину A_{c2} или A_{c3} при помощи циклической перестановки индексов 1-2-3. Подобный способ используется при решении систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса при выборе главного элемента.

Описанная процедура определения направляющих косинусов справедлива для любых видов напряженных состояний, поскольку параметры A_{ck} ($c,k = 1,2,3$) не могут быть равными нулю все одновременно.

1.3.5. В осях главных напряжений упрощаются выражения для инвариантов. Так инварианты тензора напряжений (1.49) станут равны

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad I_2(T_\sigma) = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3; \quad I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \quad (1.57)$$

инварианты деватора напряжений (1.52)

$$I_1(D_\sigma) = s_1 + s_2 + s_3 = 0; \quad I_2(D_\sigma) = -s_1s_2 - s_2s_3 - s_1s_3; \quad I_3(D_\sigma) = s_1s_2s_3, \quad (1.58)$$

где $s_i = \sigma_i - \sigma_o$, ($i=1,2,3$).

1.3.6. Кроме главных существует еще одна, специфическая, система координат для описания напряженного состояния в точке деформированного тела, которая используется в некоторых приложениях (теории прочности, пластичности и т.д.). Эта система координат z, ρ, θ является цилиндрической и называется октаэдрической. При этом ось z направлена по диагонали пространства главных напряжений, а площадка, нормальная к этой оси, называемая октаэдрической, равно наклонена к главным осям. Связь между системами координат

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{3}\sigma_o; \quad \rho = \sqrt{3}\tau_o; \quad \sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \\
\tau_o &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} = \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad \theta = \frac{1}{3}\arccos\left(\sqrt{2}\frac{I_3(D_\sigma)}{\tau_o^3}\right).
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Напряжения на октаэдрической площадке σ_o и τ_o называются октаэдрическими нормальными и касательными напряжениями соответственно. Отметим, что октаэдрическое нормальное напряжение равно среднему напряжению (1.50). Угол θ - угол вида напряженного состояния. Вместо угла θ иногда используется параметр Лоде-Надаи, равный $\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$. Этот параметр связан с углом вида так

$$\mu = -\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right). \tag{1.60}$$

Сравнивая зависимость для τ_o с выражением для второго инварианта девиатора (1.52), нетрудно установить

$$\tau_o = \sqrt{\frac{3}{2}I_2(D_\sigma)}. \tag{1.61}$$

1.3.7. Главные напряжения, являющиеся корнями уравнения (1.54), связаны с напряжениями по октаэдрическим площадкам и параметром Лоде-Надаи с помощью следующих зависимостей [8]

$$\sigma_1 = \sigma_o - \frac{3 + \mu}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu^2}}\tau_o; \quad \sigma_2 = \sigma_o + \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{3 + \mu^2}}\tau_o; \quad \sigma_3 = \sigma_o - \frac{3 - \mu}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu^2}}\tau_o, \tag{1.62}$$

1.3.8. Деформированное состояние нагруженного тела в каждой точке характеризуется компонентами продольных и сдвиговых деформаций. Совокупность этих компонент в ортогональной системе координат x, y, z образуют тензор деформаций, который может быть представлен следующей матрицей

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{1.63}$$

Тензор (1.63) симметричен, т.е. $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, поэтому число его независимых компонент равно шести. Совокупность независимых компонент тензора обычно представляется вектором деформаций $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}\}$.

Тензор деформаций является тензором второго ранга и имеет три инварианта. Эти инварианты равны

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z;$$

$$I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_x \varepsilon_z + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2);$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \det \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{xz}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}).$$

1.3.9. Тензор деформаций (1.63) может быть представлен в виде суммы

$$[T_\varepsilon] = [T_{\varepsilon_0}] + [D_\varepsilon],$$

в которой слагаемые имеют вид

$$[T_{\varepsilon_0}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}; \quad [D_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$ - средние продольные деформации.

Тензор $[T_{\varepsilon_0}]$, состоящий только из средних продольных деформаций по диагонали, называется шаровым тензором деформаций. Тензор $[D_\varepsilon]$ называется девиатором деформаций.

Инварианты шарового тензора деформаций равны

$$I_1(T_{\varepsilon_0}) = 3\varepsilon_0 = I_1(T_\varepsilon); \quad I_2(T_{\varepsilon_0}) = -3\varepsilon_0^2 = -\frac{1}{3}I_1^2(T_\varepsilon); \quad I_3(T_{\varepsilon_0}) = \varepsilon_0^3 = \frac{1}{27}I_1^3(T_\varepsilon). \quad (1.66)$$

Инварианты девиатора

$$\begin{aligned}
I_1(D_{\varepsilon}) &= e_x + e_y + e_z = 0; \\
I_2(D_{\varepsilon}) &= -e_x e_y - e_y e_z - e_x e_z + e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{xz}^2; \\
I_3(D_{\varepsilon}) &= \det \begin{vmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{vmatrix} = e_x e_y e_z - e_x e_{yz}^2 - e_y e_{xz}^2 - e_z e_{xy}^2 - 2e_{xy} e_{yz} e_{xz}.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

1.3.10. Компоненты тензора деформаций могут быть представлены в любой другой новой ортогональной системе координат x', y', z' , ориентированной по отношению к старой системе x, y, z с помощью таблицы направляющих косинусов (рис.1.3). Связь между векторами в новой $\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon'_x \ \varepsilon'_y \ \varepsilon'_z \ \gamma'_{xy} \ \gamma'_{yz} \ \gamma'_{xz}\}$ и старой $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}\}$ системах координат имеет вид

$$\{\varepsilon'\} = [m']\{\varepsilon\}. \tag{1.68}$$

Можно показать, что матрицы $[m]$ в выражении (1.53) и $[m']$ в (1.68) связаны между собой зависимостью

$$[m']^T [m] = [m]^T [m'] = E, \tag{1.69}$$

где E - единичная матрица шестого порядка.

В самом деле, поскольку удельная работа внутренних сил инвариантна к преобразованию координат, то

$$\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \{\varepsilon'\}^T \{\sigma'\}, \tag{1.70}$$

откуда, после подстановки (1.53) и (1.68), несложно получить

$$[m']^{-1} = [m]^T. \tag{1.71}$$

Таким образом, преобразование, обратное (1.68), имеет вид

$$\{\varepsilon\} = [m]^T \{\varepsilon'\}. \tag{1.72}$$

Пусть между векторами $\{\varepsilon\}$ и $\{\sigma\}$ существует зависимость $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$, а между векторами $\{\varepsilon'\}$ и $\{\sigma'\}$ связь $\{\sigma'\} = [D']\{\varepsilon'\}$. Здесь квадратные матрицы $[D]$ и $[D']$ - матрицы механических характеристик материалов в системах координат x, y, z и x', y', z' . Тогда, используя выражения (1.53) и (1.70), несложно получить следующую зависимость

$$[D'] = [m][D][m]^T. \tag{1.73}$$

1.3.11. В каждой точке деформируемого тела существуют такие взаимно ортогональные оси координат, для которых сдвиговые деформации равны нулю. Такие оси называются осями главных деформаций, а продольные деформации в направлении этих осей – главными продольными деформациями. Они являются действительными корнями кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 - I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0. \quad (1.74)$$

1.3.12. В осях главных деформаций упрощаются выражения для инвариантов. Так инварианты тензора (1.66) станут равны

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_3; \quad I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad (1.75)$$

инварианты девиатора

$$I_1(D_\varepsilon) = 0; \quad I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]; \quad I_3(D_\varepsilon) = e_1 e_2 e_3, \quad (1.76)$$

где $e_i = \varepsilon_i - \varepsilon_o$, ($i=1,2,3$).

1.3.13. Так же как и для тензора напряжений, для тензора деформаций существуют октаэдрические оси координат $z_\varepsilon, \delta_\varepsilon, \theta_\varepsilon$, задаваемые соотношениями

$$\begin{aligned} z_\varepsilon &= \sqrt{3}\varepsilon_o; \quad \rho_\varepsilon = \sqrt{3}\gamma_o; \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3); \\ \gamma_o &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad \theta_\varepsilon = \frac{1}{3} \arccos \left(8\sqrt{2} \frac{I_3(D_\varepsilon)}{\gamma_o^3} \right). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Деформации ε_o и γ_o называются октаэдрическими продольными и сдвиговыми соответственно. Отметим, что октаэдрические продольные деформации равны средним, определенным в выражении (1.65). Угол θ_ε - угол вида деформированного состояния. Параметр Лоде-Надаи для деформаций равен $\mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$. Этот

параметр связан с углом вида так

$$\mu_\varepsilon = -\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\theta_\varepsilon + \frac{4}{3} \pi \right). \quad (1.78)$$

1.3.14. Главные деформации, связаны с октаэдрическими деформациями и параметром Лоде-Надаи следующими зависимостями [9]

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \frac{3 + \mu_\varepsilon}{2\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu_\varepsilon^2}} \gamma_0; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \frac{\sqrt{2}\mu_\varepsilon}{2\sqrt{3 + \mu_\varepsilon^2}} \gamma_0; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_0 - \frac{3 - \mu_\varepsilon}{2\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu_\varepsilon^2}} \gamma_0. \quad (1.79)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – Красноярск, 1973. – 190 с.
2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. М.: Наука, 1969. – 351 с.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1961. – 537 с.
4. Бидный Г.Р., Колчин Г.Б., Клованич С.Ф. Матричный метод решения задач строительной механики. – Кишинев: Штиинца, 1980. – 307 с.
5. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. - 542 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.1. – Л.: Гостехтеориздат, 1951. - 525 с.
8. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. - Киев: Наукова думка, 1976. - 416 с.
9. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести, Справочное пособие. - Киев: Наукова думка, 1981. - 496 с.
10. Пойя Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970. - 448 с.
11. Пратусевич ЯА. Вариационные методы в строительной механике. – М.: Гостехиздат, 1948. - 400 с.
12. Рабинович И.М. Основы новейших методов расчета рамных систем. Ч.1. – М.; Госстройиздат, 1933.
13. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. - М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.
14. Справочник по теории упругости/ Под ред. П.М.Варвака и А.Ф.Рябова. – Киев:Будивельник,1971.– 419 с.
15. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
16. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. - М.: Наука, 1975. - Т. I. - 832 с.

ГЛАВА 2

ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

2.1. Предварительные соображения

2.1.1. Для наглядности изложения сущности метода конечных элементов применительно к объектам непрерывной (континуальной) структуры сначала рассмотрим область деформируемого тела в условиях плоской задачи (рис.2.1) [3]. Наметим на теле m точек, которые назовем узлами системы. При деформировании тела под действием внешней нагрузки каждый k -ый узел совершает перемещения, вектор-столбец которых $\{\bar{q}\}^{(k)} = \{\bar{q}_1^{(k)} \quad \bar{q}_2^{(k)}\} = \{\bar{u}_k \quad \bar{v}_k\}$, здесь $\bar{q}_1^{(k)} = \bar{u}_k$ и $\bar{q}_2^{(k)} = \bar{v}_k$ - горизонтальные и вертикальные составляющие перемещений соответственно. При этом, будем считать, что в точки примыкания тела к опорам вводятся обычные узлы, которые называются приопорными. Ясно, что перемещения по направлениям введенных в приопорных узлах кинематических связей равны нулю. В дальнейшем эти перемещения исключаются из рассмотрения. Будем полагать, что деформированное состояние тела в целом однозначно определяется с помощью совокупности векторов $\{\bar{q}\}^{(k)}$ для всех m узлов системы, которая образует вектор узловых перемещений системы

$$\{\bar{q}\} = \{\{\bar{q}\}^{(1)} \quad \{\bar{q}\}^{(2)} \quad \dots \quad \{\bar{q}\}^{(k)} \quad \dots \quad \{\bar{q}\}^{(m)}\}. \quad (2.1)$$

Пусть внешняя нагрузка представлена совокупностью сосредоточенных сил, прикладываемых только в узлах системы, т.е.

$$\{\bar{P}\} = \{\{\bar{P}\}^{(1)} \quad \{\bar{P}\}^{(2)} \quad \dots \quad \{\bar{P}\}^{(k)} \quad \dots \quad \{\bar{P}\}^{(m)}\}, \quad (2.2)$$

где $\{\bar{P}\}^{(k)} = \{\bar{P}_1^{(k)} \quad \bar{P}_2^{(k)}\}$. Следует особо подчеркнуть, что размерность и структура вектора $\{\bar{P}\}$ полностью соответствует вектору $\{\bar{q}\}$. Если в каком-либо узле по какому-нибудь из направлений внешняя нагрузка отсутствует, то соответствующие компоненты вектора $\{\bar{P}\}$ принимаются равными нулю. Ясно, что при таком подходе между векторами $\{\bar{q}\}$ и $\{\bar{P}\}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие в виде

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{q}\}, \quad (2.3)$$

которое, по существу, представляет собой уравнение равновесия узлов, т.к. произведение $[\bar{K}]\{\bar{q}\}$ можно интерпретировать как суммарные реактивные усилия в этих узлах. Здесь $[\bar{K}]$ - квадратная матрица размерностью $m \times m$, называемая матрицей жесткости системы. Поскольку вектора (2.1) и (2.2) имеют одинаковую размерность и блочную структуру, то матрица жесткости системы также блочная, т.е.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}]_I^{(1)} & \dots & [\bar{K}]_I^{(k)} & \dots & [\bar{K}]_I^{(m)} \\ [\bar{K}]_p^{(1)} & \dots & [\bar{K}]_p^{(k)} & \dots & [\bar{K}]_p^{(m)} \\ [\bar{K}]_m^{(1)} & \dots & [\bar{K}]_m^{(k)} & \dots & [\bar{K}]_m^{(m)} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

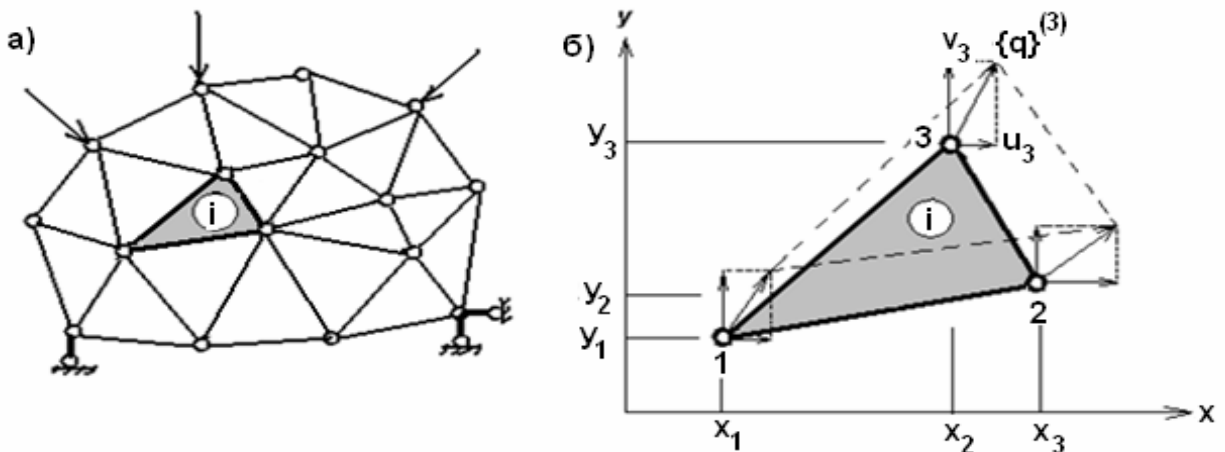


Рис.2.1.Разбиение области на конечные элементы

Если бы, предположим, матрица $[\bar{K}]$ была бы известна, то из уравнения (2.3) могли бы быть найдены искомые перемещения узлов системы, т.е.

$$\{\bar{q}\} = [\bar{K}]^{-1}\{\bar{P}\}. \quad (2.5)$$

Отметим, что подобное представление может носить самый общий характер, быть справедливым для любых объектов континуальной структуры и не зависеть от класса решаемых с помощью МКЭ задач. Для этого под узловыми перемещениями $\{\bar{q}\}^{(k)}$ следует понимать обобщенные как линейные, так и угловые смещения, а узловые силы $\{\bar{P}\}^{(k)}$ рассматривать как обобщенные, включающие и сосредоточенные силы, и моменты. Так, например, в случае объемной задачи, когда

объектом исследования является трехмерное тело, вектор $\{\bar{q}\}^{(k)}$ должен содержать три составляющих перемещений по направлениям координатных осей, а вектор $\{\bar{P}\}^{(k)}$ - три компонента усилий, действующих в направлении этих же осей, т.е. $\{\bar{q}\}^{(k)} = \{\bar{u}_k \ \bar{v}_k \ \bar{w}_k\} = \{\bar{q}_1^{(k)} \ \bar{q}_2^{(k)} \ \bar{q}_3^{(k)}\}$, $\{\bar{P}\}^{(k)} = \{\bar{P}_1^{(k)} \ \bar{P}_2^{(k)} \ \bar{P}_3^{(k)}\}$. Для изгибаемых пластин узловые вектора равны $\{\bar{q}\}^{(k)} = \{\bar{w}_k \ \bar{v}_k \ \bar{\psi}_k\} = \{\bar{q}_1^{(k)} \ \bar{q}_2^{(k)} \ \bar{q}_3^{(k)}\}$, $\{\bar{P}\}^{(k)} = \{\bar{P}^{(k)} \ \bar{M}_x^{(k)} \ \bar{M}_y^{(k)}\} = \{\bar{P}_1^{(k)} \ \bar{P}_2^{(k)} \ \bar{P}_3^{(k)}\}$, где $\bar{v}_k, \bar{\psi}_k, \bar{M}_x^{(k)}, \bar{M}_y^{(k)}$ - углы поворота и моменты относительно координатных осей. В дальнейшем, при рассмотрении различных видов напряженных состояний, компоненты узловых перемещений и сил будут указаны явно.

2.1.2. Уравнение (2.3) по форме совпадает с системой канонических (разрешающих) уравнений метода перемещений для статически неопределимых стержневых систем. Поэтому, метод конечных элементов, в данной постановке, называется методом конечных элементов в форме метода перемещений. Каждый блок матрицы жесткости (2.4) представляет собой, как и в классическом методе перемещений, реакцию по направлению p -го узла от единичного смещения k -го узла.

Отметим, что возможна и обратная постановка задачи, т.е. в форме метода сил [12], когда в узлах составляются уравнения совместности перемещений, а за основные неизвестные принимаются узловые усилия.

Однако опыт многолетнего использования МКЭ в вариантах метода сил и метода перемещений убедительно свидетельствует в пользу последнего, хотя теоретически они оба дают одинаковый результат. Предпочтение методу перемещений отдано потому, что при его использовании решается простое матричное уравнение (2.3), связывающее внешние силы с искомыми перемещениями в конечном числе узловых точек. При этом общее число уравнений для определения основных неизвестных оказывается меньшим, чем в методе сил, а матрица коэффициентов при неизвестных очень часто получается ленточной. Кроме того, преимущественное использование в расчетной практике метода перемещений обусловливается простотой и стандартностью выбора основной системы. Действительно, если в методе перемещений основная система сооружения представляется единственным образом, то в методе сил можно выбрать несколько основных систем. Последнее может привести к тому, что при неудачном выборе основной системы матрица податливости окажется плохо обусловленной, не дающей устойчивого решения системы уравнений. Заметим, что в методе перемещений отсутствует присущая методу сил сложная дополнительная процедура нахождения перемещений от внешней нагрузки по направлению основных неизвестных.

Эти обстоятельства оказались решающими для окончательного выбора метода перемещений в качестве основного варианта в процедуре метода конечных элементов. Поэтому в дальнейшем главное внимание будет уделено получению характеристик для конечных элементов и систем в целом, используемых в методе перемещений.

2.1.3. Мысленно расчленим рассматриваемое тело на элементы конечных размеров, например, треугольной формы, вершины которых совпадают с узлами системы. Выделим отмеченный на рис.2.1а жирными линиями типичный i -й конечный элемент, определенный узлами 1,2,3 (рис. 2.1b), и предположим, что этот элемент находится под воздействием только усилий взаимодействия со смежными элементами, которые по отношению к нему будем рассматривать как внешние. Очевидно, если тело в целом находится в равновесии, то и его i -ый элемент под действием указанных сил также находится в равновесии.

Приложим далее к i -му элементу вместо реальных усилий, действующих вдоль границ стыковки его со смежными элементами, статически эквивалентные узловые силы, т.е. силы, действие которых вызывает внутри элемента напряженно-деформированное состояние, аналогичное тому, какое было в нем при фактическом нагружении. В случае двумерной задачи совокупность этих усилий может быть представлена вектором-столбцом

$$\{R\}_i = \left\{ \{R\}_i^{(1)} \{R\}_i^{(2)} \{R\}_i^{(3)} \right\} \quad (2.6)$$

где $\{R\}_i^{(k)} = \left\{ R_1^{(k)} R_2^{(k)} \right\}$ - вектор узлового усилия в k -м узле i -го элемента, компонентами которого являются эквивалентные силы, отнесенные к осям $x(1)$ и $y(2)$.

Поставим в соответствие каждому узловому усилию узловое перемещение и введем в рассмотрение вектор-столбец узловых перемещений i -го элемента

$$\{q_i\} = \left\{ \{q_i\}^{(1)} \{q_i\}^{(2)} \{q_i\}^{(3)} \right\} \quad (2.7)$$

где $\{q\}^{(k)} = \left\{ q_1^{(k)} q_2^{(k)} \right\} = \left\{ u_k v_k \right\}$ - вектор перемещений в k -м узле i -го элемента с компонентами перемещений по направлению осей $x(1)$ и $y(2)$. Ясно, что вектора $\{q\}^{(k)}$ и $\{R\}_i^{(k)}$ в соотношениях (2.6) и (2.7) также следует понимать в обобщенном смысле, их размерность определяется видом напряженного состояния, это могут быть линейные и угловые перемещения, сосредоточенные силы и моменты.

В результате сплошное тело оказывается представленным набором конечного числа элементов, взаимодействующих между собой в конечном числе узловых точек. При этом ясно, что условиями такого взаимодействия должны быть равенства перемещений в узлах взаимодействующих элементов общим перемещениям узла, в котором они сходятся, а также соблюдение условий равновесия внешних и внутренних сил в этих узлах.

Очевидно, что, интерпретируя непрерывную среду такой моделью, можно свести расчет тела к расчету системы с конечным числом степеней свободы и, следовательно, определить узловые перемещения по процедуре, аналогичной по смыслу алгоритму расчета стержневых систем методами строительной механики. Для этого остается найти матрицы жесткости для отдельных элементов, а затем рассмотреть условия статической совместности совокупности элементов, получив тем самым разрешающие уравнения задачи.

Разумеется, найденные в результате такого подхода узловые перемещения не дают полной характеристики напряженно-деформированного состояния континуальной системы. Поэтому возникает необходимость найти способ перехода от этих величин к перемещениям, напряжениям и деформациям внутри конечных элементов. Следует особо подчеркнуть, что данный момент является одним из центральных в МКЭ, во многом предопределяющим его точность. По существу, речь идет о решении задач механики деформируемого твердого тела для некоторых областей в форме конечных элементов, находящихся под воздействием узловых перемещений или усилий. Если бы такие задачи можно было решать точно, то и МКЭ в этом смысле был бы точным методом. Так, например, обстоит дело в методе конечных элементов для стержневых систем, когда в рамках гипотез сопротивления материалов поведение стержней-элементов от узловых воздействий описывается точно.

2.1.4. При реализации МКЭ для континуальных тел переход от узловых перемещений к перемещениям внутри элемента осуществляется приближенно путем априорного задания так называемых интерполяционных функций [7,9,14]. Характер этих функций должен быть таким, чтобы обеспечить, по крайней мере, неразрывность при переходе от элемента к элементу. При уменьшении размеров элементов это должно привести к получению решения, стремящегося к точному.

Ясно, что при таком подходе поведение каждого конечного элемента, нагруженного в узлах, не произвольно, а находится в соответствии с некоторыми внутренними связями, накладываемыми на него интерполяционными функциями. Последние однозначно определяют состояние элемента с помощью вектора узловых перемещений $\{q\}_i$. Особо следует отметить, что из-за наложенных на элемент связей приложение сосредоточенных узловых усилий не вызывает концентрации напряжений в узловых точках. Следовательно, конечные элементы представляют собой элементы особого типа, а именно: их напряженное и деформированное состояние обуславливается связями, при которых по возможности сохраняется сплошность рассматриваемого объекта [9,7,12].

2.1.3. Реализация МКЭ, основанного на дискретном представлении континуума в виде набора конечного числа элементов, вызывает необходимость дискретизации не только внутренних усилий, но и действующих на конструкцию нагрузок путем замены их системой сосредоточенных узловых сил. Такая замена осуществляется с соблюдением энергетического баланса.

Заметим, что все зависимости, характеризующие конечные элементы, строятся в местной системе координат с последующим переходом в общую систему для всей области. Это позволяет заранее сформировать указанные соотношения независимо от очертаения области для наиболее распространенных типов конечных элементов.

2.1.4. Таким образом, процедура МКЭ состоит из ряда самостоятельных этапов, связанных определенной последовательностью:

- тело расчленяется воображаемыми линиями или плоскостями на расчетное число конечных элементов, взаимодействие которых предполагается в дискретном числе узловых точек, расположенных на границах смежных элементов;
- в качестве основных неизвестных параметров принимаются перемещения узловых точек;
- выбираются интерполяционные функции, которые единственным образом описывают перемещения по области конечного элемента и на его границах через неизвестные узловые перемещения;
- определяются матрицы, характеризующие напряженное и деформированное состояние конечного элемента с помощью узловых перемещений;
- формируются матрицы жесткости для конечных элементов, однозначно устанавливающие связь между узловыми усилиями и узловыми перемещениями элемента;
- осуществляется приведение объемных и поверхностных сил, а также начальных деформаций к эквивалентным узловым воздействиям;
- осуществляется преобразование координат (если необходимо);
- составляются и решаются уравнения равновесия (канонические уравнения метода перемещений). Другими словами, осуществляется объединение отдельных элементов в единое целое;
- определяется напряженно-деформированное состояние рассматриваемой области по узловым перемещениям с помощью матриц, найденных на четвертом этапе.

2.1.5. Решение вопросов, связанных с первым этапом МКЭ, в настоящее время осуществляется практически произвольно, на полуинтуитивном уровне, поскольку надежных критериев, определяющих форму и размеры элементов, до сих пор нет. Обычно при решении пространственных задач используются конечные элементы в форме тетраэдров, призм, параллелепипедов, а в плоских задачах – треугольные и четырехугольные. Применяются также криволинейные элементы. Аналогичные типы элементов существуют и для решения задач теории плит и оболочек. Ниже будут детально рассмотрены отдельные виды элементов, наиболее часто применяемые на практике.

2.2. Конечные элементы

2.2.1. Независимо от класса решаемой задачи и вида сооружения, их расчетная схема может быть представлена совокупностью конечных элементов той или иной разновидности. Весьма затруднительно перечислить все виды конечных элементов, предназначенных для решения задач механики деформируемого тела, существующие в настоящее время. По самым скромным подсчетам их количество уже перевалило за две сотни. Каждый из них предназначен для решения того или иного класса задач, обладает той или иной степенью точности аппроксимации, удовлетворяет различным дополнительным требованиям.

Некоторые, наиболее употребительные, конечные элементы приведены на рис. 2.2. При этом каждый из элементов характеризуется двумя числовыми параметрами. Первый из них – это количество узловых точек n в элементе, второй – степень свободы

каждого узла r , т.е. число независимых линейных и угловых перемещений, определяющих положение этого узла в пространстве после деформирования.

Обозначим вектор перемещений произвольного k -го узла i -го элемента так $\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)} q_2^{(k)} \dots q_r^{(k)}\}$. Причем, перемещения будем понимать в обобщенном смысле,

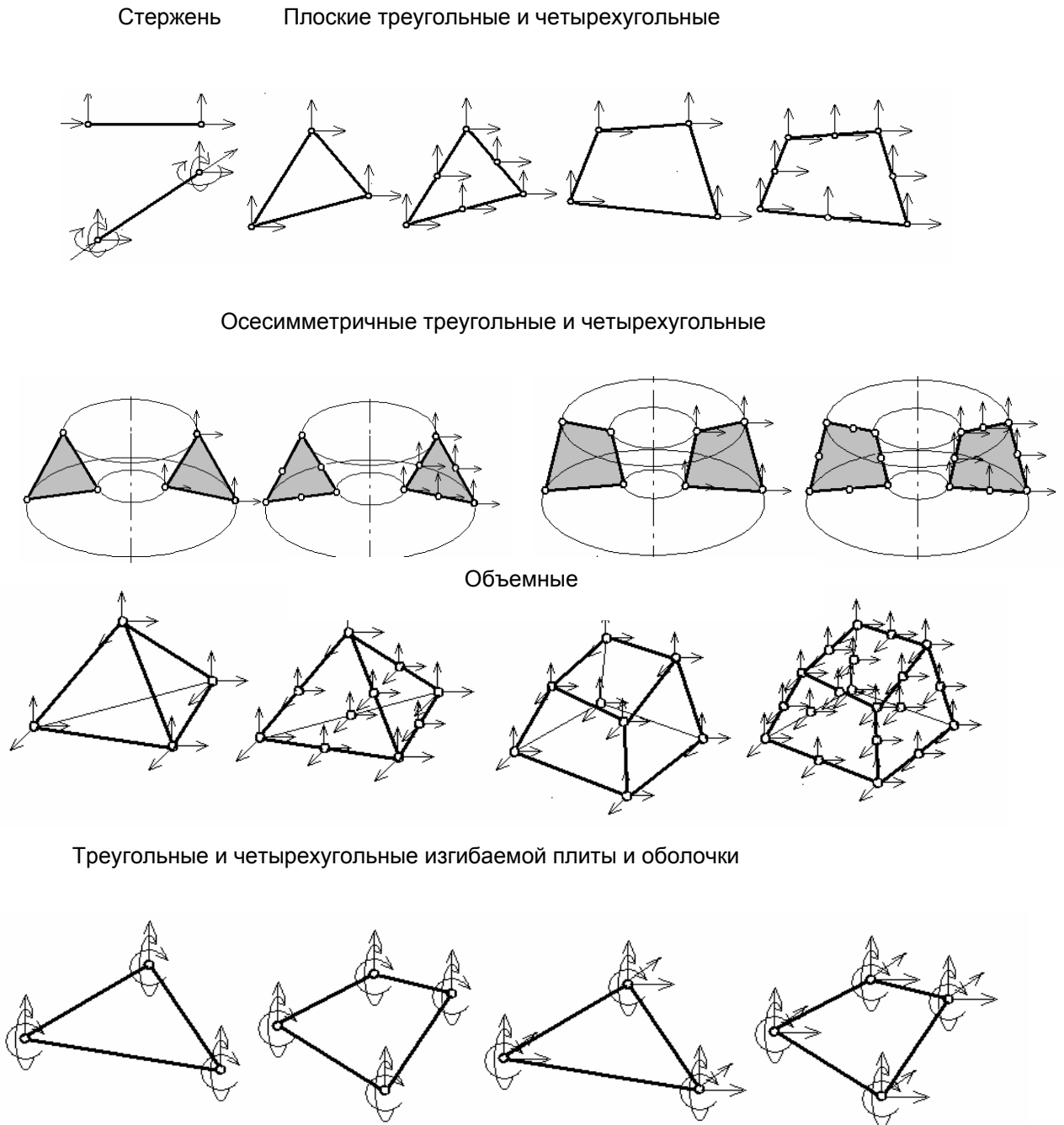


Рис.2.2. Типы конечных элементов

т.е. это могут быть как линейные, так и угловые перемещения. Совокупность этих векторов представляет собой вектор узловых перемещений элемента

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \dots \{q\}_i^{(k)} \dots \{q\}_i^{(n)} \right\}. \quad (2.8)$$

Для векторов узловых сил введем аналогичные обозначения $\{R\}_i^{(k)} = \{R_1^{(k)} R_2^{(k)} \dots R_r^{(k)}\}$, где силы также понимаем в обобщенном смысле, как сосредоточенные силы или моменты. Для всего элемента

$$\{R\}_i = \left\{ \{R\}_i^{(1)} \{R\}_i^{(2)} \dots \{R\}_i^{(k)} \dots \{R\}_i^{(n)} \right\}. \quad (2.9)$$

Между векторами $\{R\}_i$ и $\{q\}_i$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i, \quad (2.10)$$

где $[K]_i$ - матрица жесткости i -го элемента.

Учитывая блочную структуру векторов $\{R\}_i$ и $\{q\}_i$, матрицу жесткости также можно представить в блочном виде

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & \dots & [K]_{i1}^{(k)} & \dots & [K]_{i1}^{(n)} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ [K]_{il}^{(1)} & \dots & [K]_{il}^{(k)} & \dots & [K]_{il}^{(n)} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ [K]_{in}^{(1)} & \dots & [K]_{in}^{(k)} & \dots & [K]_{in}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Каждый из блоков матрицы $[K]_{il}^{(k)}$ определяет реакции в l -ом узле от единичных перемещений в k -ом узле i -го элемента.

Прежде чем получить выражение для матриц жесткости элемента, необходимо рассмотреть вопрос о переходе от узловых перемещений к перемещениям, деформациям и напряжениям внутри конечных элементов. Известно, что этот переход осуществляется приближенно путем задания так называемых интерполяционных функций. Характер этих функций должен быть таким, чтобы обеспечить, по крайней мере, неразрывность перемещений при переходе от элемента к элементу. При уменьшении размеров элементов это должно привести к решению, стремящемуся к точному. Запишем связь между узловыми перемещениями и перемещениями внутри элемента в виде [6]

$$\{u\} = [C] \{q\}_i = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)} \right] \{q\}_i, \quad (2.12)$$

где $[C]$ – так называемая матрица интерполяционных функций. Вопрос об определении этих функций для каждого вида конечных элементов будет рассматриваться в последующих разделах.

Размерность и физический смысл компонент вектора $\{u\}$ определяется видом рассматриваемого напряженного состояния. Для плоской задачи $\{u\} = \{u, v\}$, для пространственной $\{u\} = \{u, v, w\}$, для плит $\{u\} = \{w, \nu, \psi\}$ и т.п., т.е. это могут быть как линейные перемещения, так и углы поворота. Размерность блока $[C]^{(k)}$ переменна, и определяется видом изучаемого напряженного состояния и типом элемента.

Теперь, если соотношение (2.12) определено, с помощью (1.2) и (1.3) можно найти компоненты деформаций и напряжений по области i -го конечного элемента [6,7]

$$\{\varepsilon\} = [\Phi][C]\{q\}_i = [B]\{q\}_i; . \quad (2.13)$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\}_i. \quad (2.14)$$

Здесь $[B]$ - так называемая, матрица деформаций, которая, в связи с блочной структурой вектора $\{q\}_i$, также блочная

$$[B] = \left[[B]^{(1)} [B]^{(2)} \dots [B]^{(k)} \dots [B]^{(n)} \right]. \quad (2.15)$$

где $[B]^{(k)} = [\Phi][C]^{(k)}$.

Отметим, что матрица $[\Phi]$ в соотношении (2.13) определена в обобщенном смысле. Ее выражение для задач механики сплошных сред приведено в первой главе, для изгибаемых элементов матрица $[\Phi]$ или ее аналог будет приведена при описании соответствующих элементов.

2.2.2. Для получения матрицы жесткости i – го конечного элемента, т.е. чтобы установить связь между $\{R\}_i$ и $\{q\}_i$, воспользуемся принципом возможных перемещений, который в данном случае будет иметь вид

$$\{\delta q\}_i^T \{R\}_i - \iiint_{V_i} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = 0. \quad (2.16)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой возможную работу внешних сил, второе – внутренних. Отсюда, если учесть, что на основании (2.13) $\{\delta \varepsilon\}^T = \{\delta q\}_i^T [B]^T$, учитывая выражение (2.14), имея в виду, что $\{\delta q\}_i \neq 0$, получим

$$\{R\}_i = \left[\iiint_{V_i} [B]^T [D] [B] dV \right] \{q\}_i. \quad (2.17)$$

Введем обозначение

$$[K]_i = \iiint_{V_i} [B]^T [D][B] dV. \quad (2.18)$$

Тогда

$$\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i. \quad (2.19)$$

Матрица $[K]_i$ и есть искомая матрица жесткости i -го конечного элемента. Компонентами этой матрицы являются реактивные усилия в узлах по заданным направлениям, отвечающие единичным узловым перемещениям, последовательно накладываемым по этим направлениям, при условии, что остальные перемещения в узлах элемента равны нулю. Матрица жесткости является квадратной, порядок ее равен числу степеней свободы рассматриваемого конечного элемента.

2.2.3. Кроме изложенного, существуют и другие способы получения матрицы жесткости конечного элемента [1,12]. Приведем один из наиболее распространенных и наглядных методов [1]. Для этого вновь обратимся к произвольному i -му конечному элементу и предположим, что в его узлах по направлениям компонент вектора $\{q\}_i$ поставлены соответствующие связи. Зададим по направлениям введенных связей последовательно единичные перемещения. С этой целью будем каждый раз освобождать узел от соответствующей связи и давать по ее направлению единичное перемещение, а затем в деформированном состоянии вновь вводить эту связь. Очевидно, что в ней, как и в других связях, будут возникать реактивные усилия, обусловленные заданным единичным перемещением. Причем возникающие по области конечного элемента деформации и напряжения можно будет определить по формулам (2.13) и (2.14) с заменой в них вектора узловых перемещений единичной матрицей E , которую записывать не будем. Тогда

$$[\varepsilon^o]_j = [B]; \quad (2.20)$$

$$[\sigma^o]_j = [D][B], \quad (2.21)$$

где $[\varepsilon^o]_j = \left[\left\{ \varepsilon^o \right\}_1^{(1)} \left\{ \varepsilon^o \right\}_2^{(1)} \dots \left\{ \varepsilon^o \right\}_r^{(n)} \right]$ - прямоугольная матрица, каждая вектор-функция которой представляет собой компоненты деформаций в точках элемента, возникающие от единичных перемещений, последовательно накладываемых по направлениям компонент перемещений в узлах при условии, что остальные перемещения узлов равны нулю; $[\sigma^o]_j = \left[\left\{ \sigma^o \right\}_1^{(1)} \left\{ \sigma^o \right\}_2^{(1)} \dots \left\{ \sigma^o \right\}_r^{(n)} \right]$ - прямоугольная матрица, каждая вектор-функция которой суть компоненты напряжений в конечном элементе, вызванные теми же причинами.

Рассматривая реакции в дополнительных связях как внешние силы по отношению к конечному элементу, используем для их определения принцип

возможных перемещений. В качестве возможных перемещений примем самые простые, равные единицам, и зададим их по направлениям искомым сил, но не одновременно, а как ряд последовательно накладываемых единичных перемещений. При матричном подходе это означает, что возможные перемещения задаются единичной матрицей E . Опуская далее матрицу E и учитывая, что искомые реактивные усилия являются не чем иным, как элементами матрицы жесткости конечного элемента, получим

$$[K]_i = \iiint_{V_i} [\varepsilon^o]_i^T [\sigma^o]_i dV. \quad (2.22)$$

Подставляя в выражение (2.22) значения $[\varepsilon^o]_i$ и $[\sigma^o]_i$ из выражений (2.20) и (2.21), получим соотношение, совпадающее с (2.18)

$$[K]_i = \iiint_{V_i} [B]^T [D][B] dV.$$

2.2.4. И, наконец, выражение матрицы жесткости для конечного элемента может быть получено чисто формально еще более простым путем. Для этого обратимся к уравнению равновесия механики (1.1) при действии только распределенных по объему сил. Имея в виду выражения (2.13) и (2.14), умножая (1.1) слева на $[C]^T$ и интегрируя по объему конечного элемента, получим

$$\left(\iiint_{V_i} [B]^T [D][B] dV \right) \{q\}_i + \iiint_{V_i} [C]^T \{G_V\} dV = 0.$$

Выражение в скобках, которое полностью совпадает с выражением (2.18), и есть искомая матрица жесткости. Отметим, что второе слагаемое, как будет показано далее, представляет собой эквивалентные узловые силы от распределенных массовых сил.

2.2.5. Для анализа структуры матрицы жесткости запишем (2.18) с учетом (2.15)

$$[K]_i = \iiint_{V_i} \begin{Bmatrix} ([B]^{(1)})^T \\ ([B]^{(2)})^T \\ \vdots \\ ([B]^{(j)})^T \\ \vdots \\ ([B]^{(n)})^T \end{Bmatrix} [D] [B]^{(1)} [B]^{(2)} \dots [B]^{(\kappa)} \dots [B]^{(n)} dV. \quad (2.23.)$$

Из (2.23) следует, что матрица жесткости для i -го элемента является симметричной и имеет блочную структуру (2.11), типовой блок которой равен

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} dV = \left(\iiint_{V_i} ([B]^{(k)})^T [D][B]^{(j)} \right)^T dV. \quad (2.24)$$

$[K]_{ij}^{(k)}$ - типовая подматрица (2.11), элементами которой являются реактивные усилия по соответствующим направлениям в j - м узле, отвечающие единичным перемещениям по направлению компонент перемещений в k - м узле.

Поскольку при выводе уравнений для матриц жесткости конечных элементов никаких ограничений, касающихся формы элемента и вида интерполяционных функций для перемещений, не вводилось, формула (2.24) имеет общий характер.

Заметим, что матрица жесткости конечного элемента зависит не только от его геометрии и механических свойств материала, но и от принятого закона изменения компонентов перемещений по области конечного элемента.

2.2.6. Интерполяционные функции, являющиеся компонентами матрицы $[C]$ в соотношении (2.12), осуществляющие связь обобщенных перемещений по области элемента с узловыми, обычно формулируются не в общей, ортогональной системе координат x, y, z , а в местной, объектной системе, отражающей специфику геометрии элемента и не зависящей ни от его размеров, ни от положения в пространстве. Они не обязательно являются прямоугольными декартовыми, их значения нормализованы, т.е. не превышают единицы. Общее название этих систем координат – нормализованные. Ясно, что использование новых координат потребует дополнительных процедур последующего преобразования полученных матриц в общую систему и замены переменных при интегрировании. Конкретные виды нормализованных координат будут рассмотрены при описании элементов.

2.3. Узловые силы от внешних воздействий

2.3.1. При замене сплошной среды дискретной моделью внешние силы, действующие на элементы, приводятся к статически эквивалентным узловым силам, которые должны содержать такое же число компонентов, как и соответствующие перемещения в узлах, и действовать в заданных направлениях. Данная процедура осуществляется на основе равенства работ, совершаемых внешней распределенной нагрузкой, приложенной к конечному элементу, и эквивалентными ей узловыми силами на соответствующих возможных перемещениях с учетом того, что перемещение любой точки внутри элемента связано с узловыми перемещениями уравнением (2.12).

Возьмем i -й конечный элемент с n узловыми точками, каждая из которых обладает r степенями свободы. Предположим, что на элемент действуют объемные силы интенсивностью $\{G_V\} = \{X_V Y_V Z_V\}_i$. Введем вектор-столбец узловых сил $\{P_V\}_i$, отвечающих этим объемным силам. Чтобы найти этот вектор, дадим

компонентам перемещений узлов конечного элемента $\{q\}_i$ малые вариации $\{\delta q\}_i$. Вследствие этого перемещения точек внутри элемента получают соответствующие возможные перемещения $\{\delta u\} = \{\delta u \ \delta v \ \delta w\}$. Запишем работу указанных сил на этих вариациях

$$\{\delta q\}_i^T \{P_V\}_i = \iiint_{V_i} \{\delta u\}^T \{G_V\} dV . \quad (2.25)$$

Так как $\{u\} = [C]\{q\}_i$ (см.(2.12)), то $\{\delta u\}^T = \{\delta q\}_i^T [C]^T$. Поэтому

$$\{\delta q\}_i^T \{P_V\}_i = \{\delta q\}_i^T \iiint_{V_i} [C]^T \{G_V\} dV , \quad (2.26)$$

откуда, имея в виду, что $\{\delta q\}_i \neq 0$, с учетом (2.12) получим

$$\{P_V\}_i = \iiint_{V_i} [C]^T \{G_V\} dV = \iiint_{V_i} \begin{Bmatrix} ([C]^{(1)})^T \\ ([C]^{(2)})^T \\ \vdots \\ ([C]^{(\kappa)})^T \\ \vdots \\ ([C]^{(n)})^T \end{Bmatrix} \{G_V\} dV .$$

Из этого выражения следует, что вектор $\{P_V\}_i$ имеет блочную структуру $\{P_V\}_i = \{\{P_V\}_i^{(1)} \{P_V\}_i^{(2)} \dots \{P_V\}_i^{(\kappa)} \dots \{P_V\}_i^{(n)}\}$, где $\{P_V\}_i^{(\kappa)} = \{P_{1V}^{(\kappa)} P_{2V}^{(\kappa)} \dots P_{rV}^{(\kappa)}\}$ - вектор сил в κ -м узле, компоненты которого соответствуют компонентам вектора узловых перемещений. Каждый блок вектора имеет вид

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \iiint_{V_i} ([C]^{(k)})^T \{G_V\} dV . \quad (2.27)$$

2.3.2. Рассмотрим теперь конечный элемент, расположенный у границы конструкций. Допустим, что граничный участок элемента площадью S_i подвергается воздействию нагрузки интенсивностью $\{p_s\} = \{p_x \ p_y \ p_z\}_i$. Введем вектор-столбец узловых сил $\{P_S\}_i$, статически эквивалентных заданным поверхностным силам.

Запишем равенство работ внешних распределенных сил на возможных изменениях перемещений и узловых искомых сил на вариациях перемещений в узлах в виде

$$\{\delta q\}_i^T \{P_S\}_i = \iint_{S_i} \{\delta u\}^T \{p_S\} dS. \quad (2.28)$$

Отсюда, после соответствующих преобразований получим матрицу для определения узловых сил, отвечающих поверхностной нагрузке заданной интенсивности

$$\{P_S\}_i = \iint_{S_i} [C]^T \{p_S\} dS,$$

где $\{P_S\}_i = \left\{ \{P_S\}_i^{(1)} \{P_S\}_i^{(2)} \dots \{P_S\}_i^{(\kappa)} \dots \{P_S\}_i^{(n)} \right\}$; $\{P_S\}_i^{(\kappa)} = \left\{ P_{1S}^{(\kappa)} P_{2S}^{(\kappa)} \dots P_{rS}^{(\kappa)} \right\}$.

Типовой блок вектора $\{P_S\}_i$ равен

$$\{P_S\}_i^{(k)} = \iint_{S_i} ([C]^{(k)})^T \{p_S\} dS. \quad (2.29)$$

2.3.3. Допустим, что i -й конечный элемент имеет начальные деформации $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_{xt} \ \varepsilon_{yt} \ \dots \ \gamma_{xyt}\}$, вызванные изменением температуры, усадкой, набуханием и т.д. Этим деформациям, согласно (1.3), соответствуют напряжения, вектор-функция которых

$$\{\sigma_t\} = [D]\{\varepsilon_t\}. \quad (2.30)$$

Поставим в соответствие напряженно-деформированному состоянию i -го элемента от начальных воздействий вектор-столбец сил $\{P_t\}_i$, действующих в узловых точках элемента. На основании принципа возможных перемещений запишем

$$\{\delta q\}_i^T \{P_t\}_i = \iiint_{V_i} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma_t\} dV \quad (2.31)$$

или

$$\{\delta q\}_i^T \{P_t\}_i = \iiint_{V_i} \{\delta \varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon_t\} dV. \quad (2.32)$$

Так как по уравнению (2.13) $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_i$, то $\{\delta \varepsilon\}^T = \{\delta q\}_i^T [B]^T$. Отсюда вектор узловых сил, статически эквивалентных начальным воздействиям, будет иметь вид

$$\{P_t\}_i = \iiint_{V_i} [B]^T [D]\{\varepsilon_t\} dV,$$

где, имея в виду блочное строение матрицы $[B]$,

$$\{P_t\}_i = \left\{ \{P_t\}_i^{(1)} \{P_t\}_i^{(2)} \dots \{P_t\}_i^{(\kappa)} \dots \{P_t\}_i^{(m)} \right\} \text{ и } \{P_t\}_i^{(\kappa)} = \left\{ P_{1t}^{(\kappa)} P_{2t}^{(\kappa)} \dots P_{rt}^{(\kappa)} \right\}.$$

Типовой блок равен

$$\{P_t\}_i^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(k)})^T [D]\{\varepsilon_t\} dV. \quad (2.33)$$

2.3.4. Если на рассматриваемый конечный элемент, имеющий начальное деформированное состояние, кроме объемных и поверхностных распределенных сил, действуют и внешние сосредоточенные узловые силы

$$\{P_C\}_i = \left\{ \{P_C\}_i^{(1)} \{P_C\}_i^{(2)} \dots \{P_C\}_i^{(k)} \dots \{P_C\}_i^{(n)} \right\},$$

где $\{P_C\}_i^{(k)} = \{P_{1C}^{(k)} P_{2C}^{(k)} \dots P_{rC}^{(k)}\}$, то вектор равнодействующей статически эквивалентных сил в k -м узле i -го элемента запишется следующим образом:

$$\{P\}_i^{(k)} = \left\{ \begin{matrix} P_1^{(k)} \\ P_2^{(k)} \\ \vdots \\ P_r^{(k)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} P_{1C}^{(k)} + P_{1V}^{(k)} + P_{1S}^{(k)} + P_{1t}^{(k)} \\ P_{2C}^{(k)} + P_{2V}^{(k)} + P_{2S}^{(k)} + P_{2t}^{(k)} \\ \vdots \\ P_{rC}^{(k)} + P_{rV}^{(k)} + P_{rS}^{(k)} + P_{rt}^{(k)} \end{matrix} \right\}. \quad (2.34)$$

Разумеется, что компоненты вектора $\{P_S\}_i^{(k)}$ в этом выражении следует принять равными нулю, если узел k относится к элементу, расположенному не у границы конструкции.

2.3.5. Матрицы и вектора для некоторых типов элементов удобно формулировать в местной ортогональной системе координат x', y', z' , отличной от общей x, y, z , в которой осуществляется составление ансамбля элементов и формируются разрешающие уравнения. Это характерно, например, для стержневых и оболочечных элементов. Поэтому, перед сборкой таких элементов в единую систему их матрицы и вектора необходимо преобразовать в общую систему. Пусть связь между местной и общей системами координат задана таблицей направляющих косинусов, элементы которой образуют матрицу преобразования

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{x'x} & m_{x'y} & m_{x'z} \\ m_{y'x} & m_{y'y} & m_{y'z} \\ m_{z'x} & m_{z'y} & m_{z'z} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

где m_{ij} - косинусы углов между осью i местной системы координат и осью j общей системы.

Вектор перемещений преобразуется из местной в общую систему координат также с помощью матрицы $[m]$. Так, например, для типового k -го узла

$$\{q'\}_i^{(k)} = [m]\{q\}_i^{(k)}, \quad (2.36)$$

где $\{q'\}_i^{(k)}$ - вектор перемещений k -го узла i -го элемента в местной системе координат; $\{q\}_i^{(k)}$ - то же – в общей.

Обозначим вектор узловых реактивных сил в местной системе координат в виде $\{R'\}_i^{(k)}$, а в общей системе так $\{R\}_i^{(k)}$. Поскольку должно выполняться очевидное энергетическое равенство $(\{q'\}_i^{(k)})^T \{R'\}_i^{(k)} = (\{q\}_i^{(k)})^T \{R\}_i^{(k)}$ (работа не зависит от преобразования координат), то преобразование координат для векторов реакций имеет вид

$$\{R\}_i^{(k)} = [m]\{R'\}_i^{(k)}. \quad (2.37)$$

Поскольку в местной и общей системах координат связь между векторами узловых перемещений и реакций осуществляется с помощью зависимостей $\{R'\}_i^{(k)} = [K']_{ij}^{(k)} \{q'\}_i^{(j)}$, $\{R\}_i^{(k)} = [K]_{ij}^{(k)} \{q\}_i^{(j)}$, полагая, что для всех узлов элемента направление осей местной системы координат одно и то же, получим типовой блок матрицы жесткости в общей системе координат

$$[K]_{ij}^{(k)} = [m]^T [K']_{ij}^{(k)} [m]. \quad (2.38)$$

2.4. Разрешающее уравнение МКЭ

2.4.1. Для описания напряженного и деформированного состояния деформируемого тела, расчлененного на конечные элементы, матрицы жесткости для которых известны, необходимо все элементы объединить в единую систему, аппроксимирующую рассчитываемую, т.е. удовлетворить условиям статической и кинематической совместности для конструкции в целом. При этом следует учесть, что конструкция представлена совокупностью элементов, взаимодействующих в конечном числе узловых точек, а поэтому указанные условия необходимо установить для этих точек системы. Чаще всего эти вопросы решаются на основе энергетических принципов механики деформируемых сред, исходя главным образом из того, что энергия системы равна сумме энергии, каждая из которых относится к соответствующему конечному элементу. Пусть внешняя нагрузка в узлах системы представлена вектором столбцом $\{\bar{P}\}$ (2.2). Под действием этой нагрузки узлы системы получают перемещения $\{\bar{q}\}$ (2.1). На основании принципа возможных перемещений для системы, находящейся в положении равновесия,

$$\{\delta\bar{q}\}^T \{\bar{P}\} = \iiint_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV. \quad (2.39)$$

Здесь интеграл берется по всему объему тела.

Заменяв энергию, представленную интегралом в (2.39), суммой интегралов, взятых по всем m конечным элементам, получим

$$\{\delta\bar{q}\}^T \{\bar{P}\} = \sum_{i=1}^m \iiint_{V_i} \{\delta\varepsilon\}_i^T \{\sigma\}_i dV. \quad (2.40)$$

Перепишем уравнение (2.40) с учетом зависимости (2.16)

$$\{\delta\bar{q}\}^T \{\bar{P}\} = \sum_{i=1}^m \{\delta\bar{q}\}_i^T \{\bar{R}\}_i. \quad (2.41)$$

Группируя в правой части выражения (2.41) те члены, вариации которых имеют одинаковые направления смещений в одних и тех же узлах, будем иметь

$$\sum_{i=1}^m \{\delta\bar{q}\}_i^T \{\bar{R}\}_i = \{\delta\bar{q}\}^T \{\bar{R}\}, \quad (2.42)$$

где $\{\bar{R}\} = \left\{ \{\bar{R}\}^{(1)} \{\bar{R}\}^{(2)} \dots \{\bar{R}\}^{(k)} \dots \{\bar{R}\}^{(m)} \right\}$ - вектор полных внутренних узловых усилий для всей конструкции, вызванный перемещениями узлов ее дискретной модели. Причем

$$\{\bar{R}\}^{(k)} = \sum_{i\kappa} \{\bar{R}\}_i^{(\kappa)} = \left\{ \sum_{i\kappa} R_{1i}^{(\kappa)} \sum_{i\kappa} R_{2i}^{(\kappa)} \dots \sum_{i\kappa} R_{ri}^{(\kappa)} \right\} -$$

- вектор равнодействующей внутренних узловых усилий по i -м всем элементам, сходящимся в κ -м узле.

Вектор-столбец $\{\bar{R}\}$ представляет собой усилия, действующие со стороны узлов на конечные элементы. Очевидно, что на сами узлы со стороны элементов действуют усилия $\{\bar{R}\}$, т.е. реакции, вызванные перемещениями узлов системы и являющиеся результатом действия внутренних усилий, приведенных к узловому воздействию.

Подставляя выражение (2.42) в уравнение (2.41) и имея в виду изложенное, получим

$$\{\delta\bar{q}\}^T \left\{ \{\bar{P}\} - \{\bar{R}\} \right\} = 0. \quad (2.43)$$

Чтобы от (2.43) перейти к уравнениям равновесия, необходимо либо положить, что в $\{\delta\bar{q}\}$ нет нулевых членов, связанных с перемещением системы как жесткого целого, либо ввести в рассмотрение диагональную матрицу E_I [13] с числом элементов по диагонали, равным порядку $\{\bar{q}\}$. При этом каждому компоненту вектора

$\{\bar{q}\}$ ставится в соответствие диагональный член матрицы E_I . Там, где компонент $\{\bar{q}\}$ известен из кинематических условий задачи, диагональный элемент матрицы E_I примем равным нулю, а все остальные диагональные элементы положим равными единице. Тогда, если учесть, что возможные перемещения в узлах, где заданы кинематические условия, равны нулю, можно записать

$$\{\delta\bar{q}\} = E_I \{\delta\bar{q}\}_*, \quad (2.44)$$

где $\{\delta\bar{q}\}_*$ - вектор возможных перемещений в узлах системы по всем компонентам перемещений. Подставив выражение (2.44) в зависимость (2.43), получим

$$[E_I \{\delta\bar{q}\}_*]^T \{\{\bar{P}\} - \{\bar{R}\}\} = 0.$$

Так как $E_I^T = E_I$, то $\{\delta\bar{q}\}^T = \{\delta\bar{q}\}_*^T E_I$. Отсюда, учитывая, что $\{\delta\bar{q}\}_* \neq 0$, получим

$$E_I \{\{\bar{P}\} - \{\bar{R}\}\} = 0. \quad (2.45)$$

Уравнение (2.45) является матричной формой условий равновесия всех сил, приложенных к узлам системы.

2.4.2. Между вектором-столбцом полных узловых реактивных усилий для всего тела $\{\bar{R}\}$ и перемещением узлов $\{\bar{q}\}$ существует связь

$$\{\bar{R}\} = [\bar{K}] \{\bar{q}\}, \quad (2.46)$$

где $[\bar{K}]$ - матрица жесткости всей системы.

Матрицу $[\bar{K}]$ можно получить с помощью известных матриц жесткости для отдельных элементов, если, например, представить в развернутой матричной форме вектор-столбец $\{\bar{R}\}$

$$\{\bar{R}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{R}\}^{(1)} \\ \{\bar{R}\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{\bar{R}\}^{(j)} \\ \vdots \\ \{\bar{R}\}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i \in 1} ([K]_{i1}^{(1)} \{\bar{q}\}^{(1)} + \dots + [K]_{i1}^{(k)} \{\bar{q}\}^{(k)} + \dots + [K]_{i1}^{(m)} \{\bar{q}\}^{(m)}) \\ \sum_{i \in 2} ([K]_{i2}^{(1)} \{\bar{q}\}^{(1)} + \dots + [K]_{i2}^{(k)} \{\bar{q}\}^{(k)} + \dots + [K]_{i2}^{(m)} \{\bar{q}\}^{(m)}) \\ \vdots \\ \sum_{i \in j} ([K]_{ij}^{(1)} \{\bar{q}\}^{(1)} + \dots + [K]_{ij}^{(k)} \{\bar{q}\}^{(k)} + \dots + [K]_{ij}^{(m)} \{\bar{q}\}^{(m)}) \\ \vdots \\ \sum_{i \in m} ([K]_{im}^{(1)} \{\bar{q}\}^{(1)} + \dots + [K]_{im}^{(k)} \{\bar{q}\}^{(k)} + \dots + [K]_{im}^{(m)} \{\bar{q}\}^{(m)}) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i \in 1} [K]_{i1}^{(1)} \dots \sum_{i \in 1} [K]_{i1}^{(k)} \dots \sum_{i \in 1} [K]_{i1}^{(m)} \\ \sum_{i \in 2} [K]_{i2}^{(1)} \dots \sum_{i \in 2} [K]_{i2}^{(k)} \dots \sum_{i \in 2} [K]_{i2}^{(m)} \\ \vdots \\ \sum_{i \in j} [K]_{ij}^{(1)} \dots \sum_{i \in j} [K]_{ij}^{(k)} \dots \sum_{i \in j} [K]_{ij}^{(m)} \\ \vdots \\ \sum_{i \in m} [K]_{im}^{(1)} \dots \sum_{i \in m} [K]_{im}^{(k)} \dots \sum_{i \in m} [K]_{im}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{q}\}^{(1)} \\ \{\bar{q}\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{\bar{q}\}^{(j)} \\ \vdots \\ \{\bar{q}\}^{(m)} \end{Bmatrix}. \quad (2.47)$$

Здесь индекс $i \in j$ означает суммирование по всем i – м элементам, сходящимся в узле j . Подматрица $[K]_{ij}^{(k)}$ является блоком (2.24) матрицы жесткости для i – го элемента, определяющим реакции в j – м узле от единичных перемещений в k – м узле. Причем, если i –й элемент не содержит либо узла j , либо узла k , то подматрицу $[K]_{ij}^{(k)}$ следует положить равной нулю. Таким образом, матрица жесткости для всей системы будет иметь вид

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}]_1^{(1)} \dots [\bar{K}]_1^{(k)} \dots [\bar{K}]_1^{(m)} \\ [\bar{K}]_2^{(1)} \dots [\bar{K}]_2^{(k)} \dots [\bar{K}]_2^{(m)} \\ \vdots \\ [\bar{K}]_j^{(1)} \dots [\bar{K}]_j^{(k)} \dots [\bar{K}]_j^{(m)} \\ \vdots \\ [\bar{K}]_m^{(1)} \dots [\bar{K}]_m^{(k)} \dots [\bar{K}]_m^{(m)} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

где

$$[\bar{K}]_j^{(k)} = \sum_{i \in j} [K]_{ij}^{(k)}.$$

Подставляя теперь (2.46) в уравнение (2.45), получим разрешающее матричное уравнение МКЭ в форме метода перемещений

$$E_1 \{[\bar{K}]\{\bar{q}\} - \{\bar{P}\}\} = 0. \quad (2.49)$$

Заметим, что поскольку матрица E_1 , содержащая нулевые строки, является особенной, она обращает матрицу системы линейных неоднородных алгебраических уравнений тоже в особенную. В силу этого выражение (2.49) следует рассматривать только как систему уравнений относительно искомым компонент перемещений без нулевых строк. Однако если заданные кинематические условия системы представить в виде [13]

$$[E - E_1]\{\bar{q}\} = E_2 \{\bar{q}\}, \quad (2.50)$$

где $E = E_1 + E_2$ – единичная матрица, то уравнение (2.49) можно записать следующим образом

$$E_1 [\bar{K}] [E_1 + E_2] \{\bar{q}\} - E_1 \{\bar{P}\} = 0.$$

Отсюда получим выражение

$$[E_2 + E_1 [\bar{K}] E_1] \{\bar{q}\} = E_1 \{\bar{P}\} - E_1 [\bar{K}] E_2 \{\bar{q}\} + E_2 \{\bar{q}\}, \quad (2.51)$$

в котором уже не содержится нулевых строк. При этом в правую часть уравнения (2.51) входят только известные компоненты перемещений системы $E_2 \{\bar{q}\}$, в левую – все искомые компоненты вектора $\{\bar{q}\}$. Поэтому уравнение (2.51) следует рассматривать как систему уравнений относительно разыскиваемых компонент вектора-столбца узловых перемещений.

2.4.3. Разрешающие уравнения метода конечных элементов можно получить непосредственно из условий кинематической и статической совместности для конструкции в целом без прямого использования вариационного равенства (2.41). Эти условия устанавливаются для всех m узловых точек системы и для типового k -го узла имеют вид

$$\{\bar{q}\}^{(k)} = \{q\}_i^{(k)}; \quad \{\bar{P}\}^{(k)} = \sum_{i \in k} \{R\}_i^{(k)}, \quad (2.52)$$

где $\{\bar{q}\}^{(k)}$ и $\{q\}_i^{(k)}$ – вектора перемещений k -го узла системы и того узла i -го элемента, который совпадает с k -ым;

$\{\bar{P}\}^{(k)}$ и $\{R\}_i^{(k)}$ – вектора сил в k -ом узле и реакций в том узле i -го элемента, который совпадает с k -ым;

$i \in k$ – означает суммирование по всем i -ым элементам, сходящимся в k -ом узле системы.

Учитывая, что согласно (2.10) и (2.11) $\{R\}_i^{(k)} = [K]_{ij}^{(k)} \{q\}_i^{(j)}$, из второго уравнения (2.52), получим

$$\{\bar{P}\}^{(k)} = \sum_{i \in k} [K]_{ij}^{(k)} \{q\}_i^{(j)},$$

или, учитывая условие кинематической совместности

$$\{\bar{P}\}^{(k)} = \left(\sum_{i \in k} [K]_{ij}^{(k)} \right) \{\bar{q}\}^{(j)}.$$

Из соотношений (2.1), (2.2) и (2.4) следует, что

$$\{\bar{P}\}^{(k)} = [\bar{K}]_j^{(k)} \{q\}^{(j)},$$

где $[\bar{K}]_j^{(k)}$ - типовой блок глобальной матрицы жесткости системы (2.4), определяющий реакции в k -ом узле от единичных перемещений в j -ом узле.

Таким образом

$$[\bar{K}]_j^{(k)} = \sum_{i \in k} [K]_{ij}^{(k)}. \quad (2.53)$$

Особо отметим, что при объединении конечных элементов в единую систему с помощью соотношения (2.53) можно в процессе формирования глобальной матрицы жесткости учесть и граничные условия. Так, если в узел k по каком-либо направлению введены обобщенные связи, то суммирование в этом узле производится только по оставшимся направлениям. Если же узел закреплен полностью, то он вообще не участвует в составлении ансамбля.

2.4.4. Переходя к рассмотрению всей системы, мысленно расчлененной на конечные элементы, взаимодействующие между собой в узловых точках, необходимо учесть, что в каждом k -м узле сходится несколько элементов. Поэтому полный вектор узловых внешних сил можно представить зависимостью

$$\{\bar{P}\}^{(k)} = \sum_{i \in k} \{P\}_i^{(k)} = \left\{ \sum_{i \in k} P_{1i}^{(k)} \sum_{i \in k} P_{2i}^{(k)} \dots \sum_{i \in k} P_{ri}^{(k)} \right\} = \left\{ \bar{P}_1^{(k)} \bar{P}_2^{(k)} \dots \bar{P}_r^{(k)} \right\}, \quad (2.54)$$

где символ $i \in k$ означает, что суммирование производится по всем i -м элементам, примыкающим к k -му узлу, т.е. вектор $\{\bar{P}\}^{(k)}$ является равнодействующей всех внешних сил, приложенных к узлу k .

Совокупность векторов $\{\bar{P}\}^{(k)}$ представляет собой вектор-столбец полных узловых сил для всей конструкции

$$\{\bar{P}\} = \left\{ \{\bar{P}\}^{(1)} \{\bar{P}\}^{(2)} \dots \{\bar{P}\}^{(k)} \dots \{\bar{P}\}^{(m)} \right\}. \quad (2.55)$$

Точность замены внешних распределенных нагрузок и начальных воздействий статически эквивалентными узловыми силами во многом зависит от того, насколько удачно выбраны функции, интерполирующие перемещения точек элемента, обусловленных перемещением его узлов.

2.5. Решение нелинейных задач

2.5.1. Численные исследования конструкций с учетом реальных свойств материалов приводит к необходимости решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейность разрешающих уравнений задачи обусловлена, главным образом, непропорциональной связью между напряжениями и деформациями. Этот тип нелинейности носит название физической. Кроме того, нелинейность может быть вызвана, во-первых, нелинейными зависимостями между деформациями и перемещениями, во-вторых, большими перемещениями, соизмеримыми с внешними размерами конструкции, когда приходится отказываться от гипотезы первоначального недеформируемого состояния расчетной схемы в процессе нагружения. Проявление геометрической нелинейности характерно для сооружений и конструкций в стадиях работы, близких к предельным. Точное решение задач прочности и устойчивости тонкостенных конструкций также возможно лишь в геометрически нелинейной постановке.

Изложим сущность численного решения нелинейных задач МКЭ в трактовке [6].

Независимо от типа нелинейности, разрешающим уравнением МКЭ (2.3) является уравнение равновесия. При этом вся информация о физической и геометрической нелинейности содержится в матрице жесткости конструкции $[K]$, компоненты которой связаны с матрицами жесткости отдельных элементов соотношением (2.53). В то же время, характеристики отдельных элементов определяются двумя матрицами $[D]$ и $[B]$ (2.13) и (2.14). В физически нелинейных задачах механические характеристики материалов, которые определяются матрицей $[D]$, являются сложными функциями компонентов деформаций, напряжений или перемещений, определяемыми в соответствии с физической моделью материала, т.е. $[D] = [D(\{\bar{q}\})]$. В геометрически нелинейных задачах нелинейной будет матрица $[B] = [B(\{\bar{q}\})]$ и вектор координат узлов $\{x\} = \{x(\{\bar{q}\})\}$. В общем случае и вектор внешней нагрузки может быть нелинейным, зависящим от $\{\bar{q}\}$. Такое случается, например, в случае действия на конструкцию начальных (температурных) деформаций, когда внешние сосредоточенные узловые силы зависят от матрицы $[D]$ (2.33). Однако для простоты изложения последний случай здесь рассматривать не будем. Таким образом, несмотря на различную физическую природу двух типов нелинейности, математическая формулировка задачи и в том и другом случае одинакова и сводится к решению нелинейных разрешающих уравнений

$$\bar{F}(\{\bar{q}\}) = [\bar{K}(\{\bar{q}\})]\{\bar{q}\} - \{\bar{P}\} = 0. \quad (2.56)$$

Именно поэтому способы решения физически и геометрически нелинейных задач могут быть рассмотрены с единых методических позиций.

2.5.2. Изложенные в П.4 методы решения системы нелинейных алгебраических уравнений могут быть формально применены и к нелинейному разрешающему уравнению МКЭ (2.56).

Допустим, что известно решение этого уравнения $\{\bar{q}\}$. Тогда вариация (2.56) из положения равновесия по $\{\delta\bar{q}\}$ с учетом того, что $\{\bar{P}\}$ не зависит от $\{\bar{q}\}$, будет иметь вид

$$\delta F(\{\bar{q}\}) = \delta([\bar{K}(\{\bar{q}\})]\{\bar{q}\}). \quad (2.57)$$

Введем в рассмотрение матрицу жесткости $[\bar{K}_T]$, зависящую от достигнутого уровня перемещений $\{\bar{q} - \delta\bar{q}\}$. Согласно рис. 2.3 а получим $\delta F(\{\bar{q}\}) = [\bar{K}_T]\{\delta\bar{q}\}$.

Рассмотрим процедуру Ньютона-Рафсона применительно к уравнению (2.56), взяв за k – е приближение к корню вектор-столбец $\{\bar{q}^{(k)}\}$. Легко видеть, что если $\{\bar{q}^{(k)}\} \approx \{\bar{q} + \delta\bar{q}\}$, то $\delta F(\{\bar{q}\}) = -F(\{\bar{q}^{(k)}\})$, $[\bar{K}_T] = [\bar{K}(\{\bar{q}^{(k)}\})]$ и, следовательно,

$$\{\Delta\bar{q}^{(k+1)}\} = -[\bar{K}(\{\bar{q}^{(k)}\})]^{-1} F(\{\bar{q}^{(k)}\}). \quad (2.58)$$

Отсюда

$$\{\bar{q}^{(k+1)}\} = \{\bar{q}^{(k)}\} - [\bar{K}(\{\bar{q}^{(k)}\})]^{-1} F(\{\bar{q}^{(k)}\}). \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.59)$$

Если в (2.59) положить матрицу $[\bar{K}(\{\bar{q}^{(k)}\})]$ б) гоанной, то придем к процедуре Ньютона-Канторовича (рис.2.3 б)

$$\{\bar{q}^{(k+1)}\} = \{\bar{q}^{(k)}\} - [\bar{K}(\{\bar{q}^{(o)}\})]^{-1} F(\{\bar{q}^{(k)}\}). \quad (2.60)$$

Отметим, что $F(\{\bar{q}^{(k)}\})$, по существу, является неуровновешенным вектором-столбцом нагрузки $\{\Delta\bar{P}\}$ (невязкой сил) (рис.2.3).

Для решения уравнения (2.56) можно использовать также метод итерации

$$\{\bar{q}^{(k+1)}\} = [\bar{K}(\{\bar{q}^{(k)}\})]^{-1} \{\bar{P}\}, \quad (2.61)$$

непосредственно следующий из (2.56). Ясно, что на первом этапе такой процедуры вектор $\{\bar{q}^{(o)}\}$ определяется посредством матрицы жесткости $[\bar{K}_o]$, в которой все члены, связанные с физической и геометрической нелинейностью, принимаются равными нулю. Затем решения повторяются, причем на каждом $k+1$ этапе матрица жесткости уточняется с помощью вектора узловых перемещений, найденного на предыдущем шаге итерационного процесса.

Разумеется, что при любом итерационном процессе процедуру счета повторяют до тех пор, пока разница между результатами решений, полученными на данном и предыдущем этапах, не будет достаточно малой.

2.5.3. Как уже отмечалось, в нелинейных задачах существенное значение имеет физическая интерпретация вычислительной процедуры, поскольку это создает определенную уверенность в том, что полученное решение будет искомым. Именно на этом и основаны все известные методы решения нелинейных задач механики сплошной среды. Однако можно показать, что такие приемы сводятся, в конечном счете, к какой-либо модификации метода Ньютона.

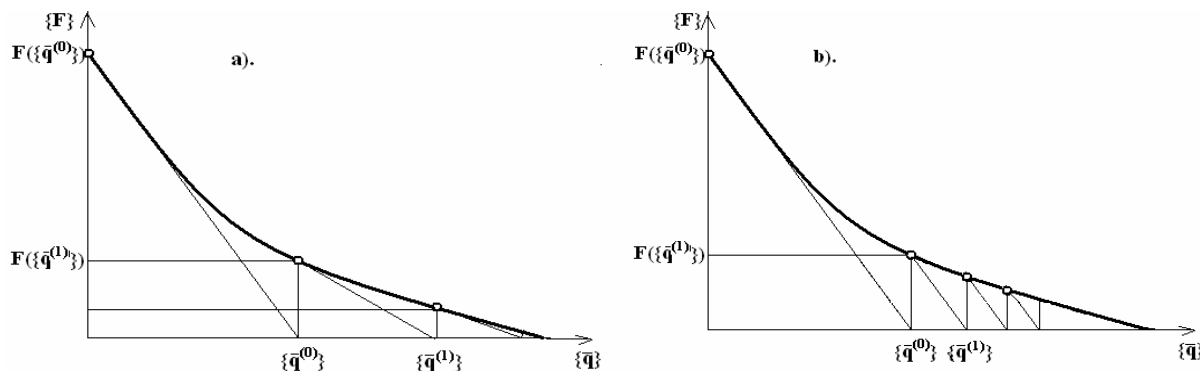


Рис.2.3. Методы решения нелинейной задачи:
а) - Ньютона-Рафсона; б) - Ньютона-Канторовича

Рассмотрим, например, метод упругих решений А.А.Ильюшина [8], заключающийся в следующем. Вначале решается чисто упругая задача и определяется вектор-столбец узловых перемещений $\{\bar{q}^{(o)}\} = [\bar{K}_o]\{\bar{P}\}$, которому соответствует в каждом i -м конечном элементе вектор-функция (2.13)

$$\{\epsilon^{(o)}\} = [B]\{q^{(o)}\}_i.$$

Затем, используя определяющие уравнения связи между напряжениями и деформациями, находится вектор-функция $\{\sigma^{(o)}\} = [D]\{q^{(o)}\}_i \{\epsilon\}$. Это дает возможность с помощью уравнения (см. п. 2.3.3)

$$\{P_{\sigma^{(o)}}\}_i = \iiint_{V_i} [B]\{\sigma^{(o)}\} dV \quad (2.62)$$

определить вектор-столбец узловых внешних сил $\{\bar{P}_{\sigma^{(o)}}\}$, обусловленный узловыми перемещениями $\{\bar{q}^{(o)}\}$ в рассматриваемой нелинейной системе. Далее вычисляется разность

$$\{\Delta\bar{P}^{(1)}\} = \{\bar{P}\} - \{\bar{P}_{\sigma^{(o)}}\}, \quad (2.63)$$

представляющая собой вектор невязки сил, который прикладывается к рассчитываемой конструкции, и из упругого решения находятся перемещения

$$\{\Delta \bar{q}^{(1)}\} = [\bar{K}_o] \{\Delta \bar{P}^{(1)}\}.$$

После этого определяется вектор-столбец $\{\bar{q}^{(1)}\} = \{\bar{q}^{(o)}\} + \{\Delta \bar{q}^{(1)}\}$ и соответствующие

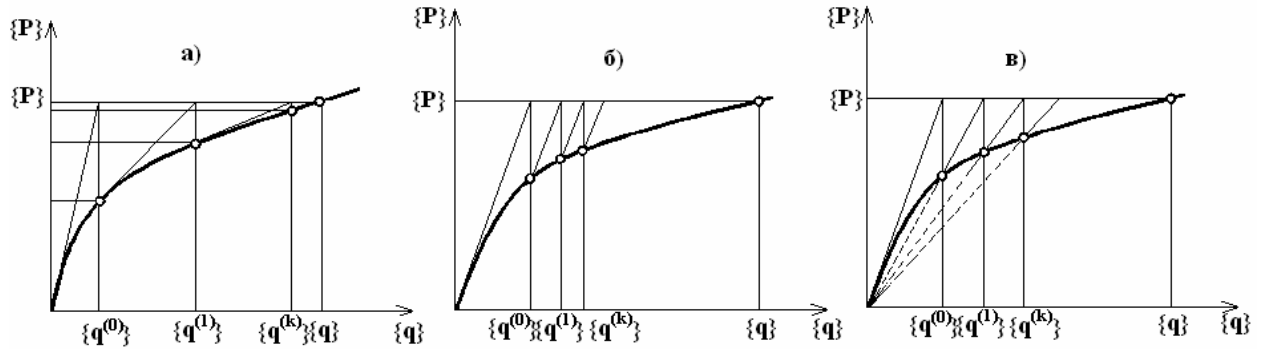


Рис.2.4. Итерационные методы:
а) – Ньютона-Рафсона; б) – Ньютона-Канторовича;
в) – модифицированный Ньютона-Рафсона

ему $\{\epsilon^{(1)}\}$, $\{\sigma^{(1)}\}$ и $\{\bar{P}^{(2)}\}$. Затем процесс повторяется до тех пор, пока невязка сил $\{\Delta P^{(k)}\}$ не будет меньше заданной точности решения.

Описанная процедура полностью совпадает с методом Ньютона-Канторовича, если матрица жесткости остается постоянной, но здесь каждая из рассматриваемых величин имеет вполне определенный физический смысл.

Отметим, что если матрица жесткости уточняется на каждой итерации, причем это уточнение получается с помощью секущей линеаризации, то метод упругих решений можно рассматривать как некий модифицированный вариант метода Ньютона-Рафсона.

Схематично, методы решения нелинейного матричного уравнения можно изобразить так (рис.2.5).

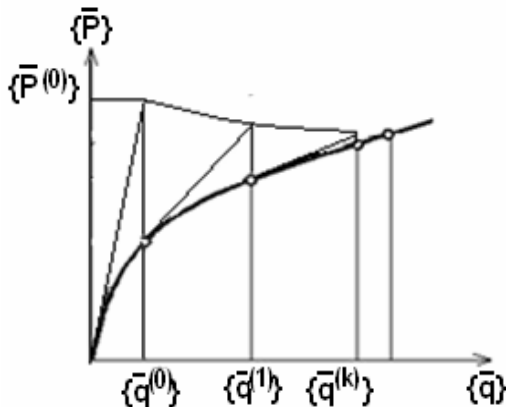


Рис.2.5. Итерационный метод с нелинейной правой частью

В некоторых нелинейных задачах, таких, как задача о вынужденных деформациях, например, температурных, правая часть системы (2.56), которая устанавливается для каждого элемента по формулам (2.33) и зависит от механических характеристик материала, также является функцией узловых перемещений $\{\bar{P}\} = \{\bar{P}\{\bar{q}\}\}$. Это требует уточнения вектора свободных членов в (2.56) на каждой

итерации. Схематично этот процесс, например, для метода Ньютона-Рафсона изображен на рис.2.5. Аналогичные схемы применяются и для других итерационных методов.

2.5.4. Таким образом, решение нелинейных задач сводится к последовательному приближению к искомому решению по формуле (2.56). Процесс вычислений заканчивается, когда достигнута заданная точность решения ε , т.е., при выполнении условия $\|\delta q\| \leq \varepsilon$. Здесь $\|\delta q\|$ - норма вектора $\{\delta q\}$. При этом под нормой чаще всего понимают эвклидову норму

$$\|\delta q\| = \sqrt{\{\delta q\}^T \{\delta q\} / \{q\}^T \{q\}}. \quad (2.64)$$

2.5.5. Известно, что нелинейность задачи ведет к нарушению принципа суперпозиции и ее решение существенным образом зависит от истории (пути) нагружения. Естественно, что в случае сложного, непропорционально нагружения решение может быть получено лишь разбиением пути нагружения на малые интервалы и суммированием найденных на каждом интервале решений, т.е. на основе, так называемого, шагового метода.

Реальное нагружение сооружения всегда является процессом, протекающим во времени, даже если для описания процесса деформирования время явно не используется, как, например, при статических кратковременных нагрузках. Однако, если существующие численные методики временных задач используют дискретизацию во времени, то методы решения статических кратковременных задач, как правило, временной фактор не учитывают. В то же время, как отмечается в работе [14], если принять, что внешняя нагрузка всегда является функцией времени, то “практически не чувствуется различия между линейными и нелинейными системами, большими и малыми перемещениями, между статикой и динамикой”. Разумеется, при этом, решение отыскивается на достаточно малых временных интервалах, совокупность которых составляет полное время действия нагрузки. Это положение лежит в основе шагового метода.

Для реализации шаговой концепции метод конечных элементов должен быть сформулирован в инкрементальной форме, когда разрешающие уравнения записываются не для конечных величин узловых внешних воздействий, а для их приращений в пределах каждого шага. При этом процесс деформирования тела как при динамических, так и при статических кратковременных и длительных воздействиях удобно представлять как процесс движения его точек, а решение задачи отыскивать, последовательно переходя от шага к шагу, в виде перемещения узловых точек $\{q\}$ в момент времени $t + \Delta t$, т.е. $\{q^{t+\Delta t}\} = \{q^t\} + \{\Delta q\}$. При этом вектор решения на каждом шаге $\{\Delta q\}$ должен быть найден из системы уравнений (2.56), но записанной в инкрементальной форме

$$[K(\{q^t\})]\{\Delta q\} - \{\Delta P\} = 0, \quad (2.65)$$

где $\{K(\{q^t\})\}$ матрица жесткости системы, являющаяся функцией ее состояния в момент времени t ; $\{\Delta P\}$ – вектор приращений узловых внешних сил системы,

Процедура шагового метода представлена графически на рис. 2.7 а.

При решении реальных задач приходится иметь дело с конечными временными интервалами, что, как видно из рис.2.7 а, ведет к «дрейфу» приближенного решения от точного. Для устранения этого «дрейфа» на каждом шаге могут быть использованы

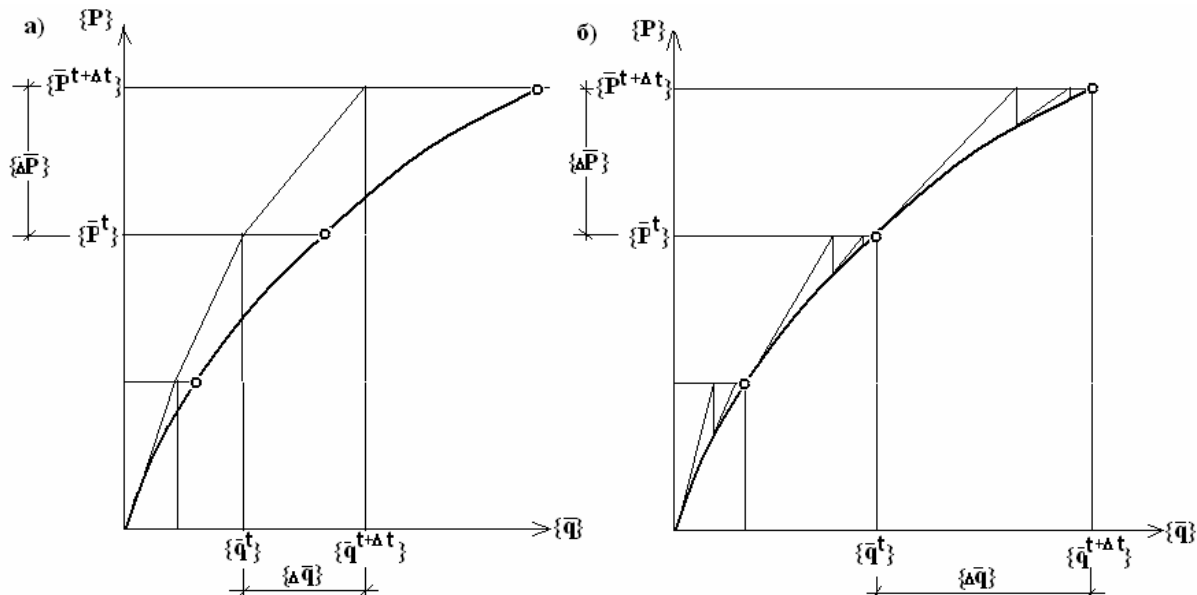


Рис.2.6. Шаговый и шагово-итерационный методы

различные итерационные алгоритмы, описанные ранее. Пример шагово-итерационного алгоритма приведен на рис.2.7 б.

2.6. Формулировка динамических задач

2.6.1. Рассмотрим деформируемое тело, представленное совокупностью m конечных элементов, при действии на него динамических нагрузок, заданных как функции времени t . Обратимся к i -му конечному элементу с узлами $1, 2, \dots, n$. Будем, как и ранее, характеризовать состояние этого элемента значениями его узловых перемещений, но изменяющимися во времени

$$\{q(t)\}_i = \left\{ \{q(t)\}_i^{(1)} \{q(t)\}_i^{(2)} \dots \{q(t)\}_i^{(k)} \dots \{q(t)\}_i^{(n)} \right\}, \quad (2.66)$$

где $\{q(t)\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)}(t) q_2^{(k)}(t) \dots q_r^{(k)}(t)\}$ – вектор обобщенных перемещений узлов k -го узла элемента.

Введем вектор-столбец узловых усилий, соответствующих узловым перемещениям. Компоненты этого вектора также будут функциями времени

$$\{R(t)\}_i = \left\{ \{R(t)\}_i^{(1)} \{R(t)\}_i^{(2)} \dots \{R(t)\}_i^{(k)} \dots \{R(t)\}_i^{(n)} \right\}, \quad (2.67)$$

где $\{R(t)\}_i^{(k)} = \{R_1^{(k)}(t) R_2^{(k)}(t) \dots R_r^{(k)}(t)\}$ - вектор обобщенных реактивных сил в k -ом узле элемента.

Согласно принципу Даламбера задача динамики деформируемых систем может быть рассмотрена как статическая, если ко всем внешним силам, действующим на тело, добавить силы инерции, равные произведению масс на их ускорения, взятые со знаком минус. Следовательно, если непосредственно к i -му элементу никакие внешние силы не приложены, то в результате ускорений следует учесть только инерционную нагрузку от массы, распределенной по всему элементу. Очевидно, что вектор-функция интенсивности инерционной нагрузки будет

$$\{p_g\} = -\rho \frac{d^2}{dt^2} \{u(x, y, z, t)\} = -\rho \{\ddot{u}(x, y, z, t)\} = -\rho \{u(x, y, z, t) \nu(x, y, z, t) \bar{w}(x, y, z, t)\}, \quad (2.68)$$

где ρ - плотность материала.

Используя зависимость (2.12), положим, что

$$\{p_g\} = -\rho [C] \{\ddot{q}(t)\}_i. \quad (2.69)$$

Приведем теперь распределенные силы инерции, которые по характеру своего действия могут быть отнесены к объемному типу нагрузок, к эквивалентным узловым усилиям $\{P_g\}_{iu}$. Естественно, что это приведение может быть выполнено на основе равенства работ распределенных сил на возможных вариациях перемещений и узловых сил на возможных вариациях перемещений в узлах

$$\{\delta q\}_i^T \{P_g\}_i = \iiint_{V_i} \{\delta u\}_i^T \{p_g\} dV = -\{\delta q\}_i^T \left[\iiint_{V_i} [C]^T \rho [C] dV \right] \{\ddot{q}(t)\}_i. \quad (2.70)$$

Отсюда

$$\{P_g\}_i = - \left[\iiint_{V_i} [C]^T \rho [C] dV \right] \{\ddot{q}(t)\}_i. \quad (2.71)$$

Введем новое обозначение

$$[M]_i = \iiint_{V_i} [C]^T \rho [C] dV. \quad (2.72)$$

Тогда

$$\{P_g\}_i = -[M]_i \{\ddot{q}(t)\}_i, \quad (2.73)$$

где $\{P_g\}_i = \left\{ \{P_g(t)\}_i^{(1)} \{P_g(t)\}_i^{(2)} \dots \{P_g(t)\}_i^{(k)} \dots \{P_g(t)\}_i^{(n)} \right\}$ - вектор узловых сил инерции в i -ом элементе; $\{P_g(t)\}_i^{(k)} = \{P_{1g}^{(k)}(t) P_{2g}^{(k)}(t) \dots P_{rg}^{(k)}(t)\}$ - вектор

инерционной силы в κ -ом узле. Матрица $[M]_i$ называется матрицей инерции i – го конечного элемента. Т.к., в соответствии с (2.12), матрица $[C]$ имеет блочную структуру, то (2.72) может быть представлена следующим образом

$$[M]_i = \begin{bmatrix} [M]_{iI}^{(1)} & \dots & [M]_{iI}^{(k)} & \dots & [M]_{iI}^{(n)} \\ [M]_{ij}^{(1)} & \dots & [M]_{ij}^{(k)} & \dots & [M]_{ij}^{(n)} \\ [M]_{in}^{(1)} & \dots & [M]_{in}^{(k)} & \dots & [M]_{in}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Блоками матрицы $[M]_{ij}^{(k)}$ в (2.74) являются инерционные силы в узле j от единичных ускорений узла k .

Из сравнения (2.74) с (2.11) следует, что матрица $[M]_i$ и ее блоки по своей структуре аналогичны матрице жесткости конечного элемента.

2.6.2. Рассмотрим влияние сил сопротивления на динамическую систему. Предположим, что силы сопротивления пропорциональны скорости или первой производной перемещений. Поскольку такой тип вязкого сопротивления ни в коей мере не является единственным, будем считать его следствием линеаризации действительной, более сложной, нелинейной задачи, решение которой получается с помощью итерационного или пошагового метода вычисления.

Введем в рассмотрение матрицу коэффициентов пропорциональности $[S]$, характеризующую вязкие свойства материала i -го элемента. Тогда вектор-функция интенсивности сопротивления колебанию по области тела будет

$$\{p_g^c\} = -[S] \frac{d}{dt} \{u(x, y, z, t)\} = -[S] \{\dot{u}(x, y, z, t)\}. \quad (2.75)$$

Зависимость (2.75) для любой точки i – го элемента представим также с помощью (2.12) следующим образом

$$\{p_g^c\} = -[S][C]\{\dot{q}(t)\}_i. \quad (2.76)$$

Распределенные по области i – го элемента силы сопротивления (2.76) снова приведем к эквивалентным узловым силам $\{p_g^c\}_i$

$$\{\delta q\}_i^T \{p_g^c\}_i = \iiint_{V_i} \{\delta u\}^T \{p_g^c\} dV = -\{\delta q\}_i^T \left[\iiint_{V_i} [C]^T [S] [C] dV \right] \{\dot{q}(t)\}_i = -\{\delta q\}_i^T [f]_i \{\dot{q}(t)\}_i.$$

Отсюда, учитывая, что $\{\delta q\}_i \neq 0$, получим

$$\{P_g^c\}_i = -[f]_i \{q(t)\}_i, \quad (2.77)$$

где $[f]_i$ - квадратная матрица сопротивления i – го элемента [13].

Матрицу $[f]_i$ по аналогии с матрицей (2.74) можно представить в виде

$$[f]_i = \begin{bmatrix} [f]_{i1}^{(1)} & \dots & [f]_{i1}^{(k)} & \dots & [f]_{i1}^{(n)} \\ [f]_{ij}^{(1)} & \dots & [f]_{ij}^{(k)} & \dots & [f]_{ij}^{(n)} \\ [f]_{in}^{(1)} & \dots & [f]_{in}^{(k)} & \dots & [f]_{in}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Здесь $[f]_{ij}^{(k)}$ - подматрица сопротивления для i – го элемента, компонентами которой являются силы в j -ом узле, отвечающие единичным скоростям, последовательно накладываемым по направлениям компонент сил в узле k . При этом всякий раз скорости по всем остальным направлениям в узлах элемента равны нулю. Видно, что матрица $[f]_i$ и ее подматрицы $[f]_{ij}^{(k)}$ совпадают по структуре с матрицей жесткости и ее блоками для рассматриваемого i – го элемента.

2.6.3. Добавим теперь полученные инерционные силы (2.73) и силы сопротивления (2.77) в уравнение равновесия узлов элемента (2.10). Получим

$$[K]_i \{q(t)\}_i = \{R\}_i + \{P_g(t)\}_i + \{P_g^c(t)\}_i$$

или

$$[M]_i \{\ddot{q}(t)\}_i + [f]_i \{\dot{q}(t)\}_i + [K]_i \{q(t)\}_i = \{R(t)\}_i. \quad (2.79)$$

2.6.4. Переходя от отдельных элементов к системе в целом, запишем разрешающее уравнение МКЭ для динамических задач, которое по форме будет совпадать с (2.79)

$$[\bar{M}] \{\ddot{\bar{q}}(t)\} + [\bar{f}] \{\dot{\bar{q}}(t)\} + [\bar{K}] \{\bar{q}(t)\} = \{\bar{P}(t)\}, \quad (2.80)$$

где $\{\bar{q}\}$, $\{\dot{\bar{q}}\}$, $\{\ddot{\bar{q}}\}$ - вектора перемещений, скоростей ускорений узлов системы, имеющие одинаковую структуру и размерность, определенные в выражении (2.1); $[\bar{K}]$, $[\bar{f}]$, $[\bar{M}]$ - квадратные матрицы жесткости, сопротивления и инерции системы, структура и размерность которых одинаковы и определены соотношением (2.4).

Матрицы $[\bar{f}]$, $[\bar{M}]$, так же как и матрица $[\bar{K}]$ (2.4) блочные, т.е.

$$[\bar{f}] = \begin{bmatrix} [\bar{f}]_I^{(1)} & \dots & [\bar{f}]_I^{(k)} & \dots & [\bar{f}]_I^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\bar{f}]_j^{(1)} & \dots & [\bar{f}]_j^{(k)} & \dots & [\bar{f}]_j^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\bar{f}]_m^{(1)} & \dots & [\bar{f}]_m^{(k)} & \dots & [\bar{f}]_m^{(m)} \end{bmatrix}; \quad [\bar{M}] = \begin{bmatrix} [\bar{M}]_I^{(1)} & \dots & [\bar{M}]_I^{(k)} & \dots & [\bar{M}]_I^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\bar{M}]_j^{(1)} & \dots & [\bar{M}]_j^{(k)} & \dots & [\bar{M}]_j^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\bar{M}]_m^{(1)} & \dots & [\bar{M}]_m^{(k)} & \dots & [\bar{M}]_m^{(m)} \end{bmatrix}$$

Типовые блоки этих матриц

$$[\bar{f}]_j^{(k)} = \sum_{i \in k} [f]_{ij}^{(k)}; \quad [\bar{M}]_j^{(k)} = \sum_{i \in k} [M]_{ij}^{(k)}, \quad (2.81)$$

где суммирование, по-прежнему, ведется по всем i -ым элементам, сходящимся в узле k .

Зависимость (2.80) представляет собой разрешающее матричное уравнение МКЭ в форме метода перемещений для решения динамических задач. Его следует рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Естественно, что для решения этой системы необходимо задание, кроме граничных условий на контуре тела, начальных условий вида при $t = t_0$,

$$\{\bar{q}(t)\} = \{\bar{q}_0(t)\}; \quad \{\dot{\bar{q}}(t)\} = \{\dot{\bar{q}}_0(t)\}. \quad (2.82)$$

2.6.5. Материал данного раздела носит скорее ознакомительный характер, не преследующий цель детального рассмотрения всех вопросов, связанных с практической реализацией методов решения уравнения (2.80). Данной проблеме посвящены обширные исследования, например [2,5,7,10,15]. Отметим лишь, что в последнее время наметился существенный прогресс в области численных исследований динамических задач [4,11]. Разработаны весьма эффективные схемы и алгоритмы, позволяющие решать обширный класс задач при большом числе динамических степеней свободы. Традиционно большинство исследований уделяет первостепенное значение решению уравнения типа (2.80), но без правой части, т.е. однородной системы дифференциальных уравнений. Речь идет о, так называемых, свободных колебаниях, с математической точки зрения - задаче на собственные значения. На сегодня среди методов решения задач на собственные значения наибольшей популярностью пользуется метод итерации в подпространстве [2], позволяющий определить лишь необходимую с инженерной точки зрения часть собственных частот и форм колебаний. Для решения задачи о вынужденных колебаниях, т.е., когда задана функция динамической внешней нагрузки, а система становится неоднородной, наибольшее распространение получили два подхода. В первом из них используется прямое численное интегрирование дифференциальных уравнений движения методом конечных разностей, причем чаще применяется метод Ньюмарка [2]. Во втором подходе реализуется, так называемый, метод разложения по собственным формам [2], позволяющий путем предварительных преобразований к базису собственных векторов свести систему дифференциальных уравнений (2.80) к независимым уравнениям второго порядка, во многих случаях допускающих аналитическое или прогнозируемое и обзримое численное решение. Однако еще раз

отметим, что задачи динамики выходят за рамки этой книги и далее не рассматриваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Госстройиздат, 1968. -241 с.
2. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
3. Бидный Г.Р., Колчин С.Ф., Клованич С.Ф. Матричный метод решения задач строительной механики. – Кишинев: Штиинца, 1980. –308 с.
4. Городецкий А.С, Шмуклер В.С., Бондарев А.В. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций. – Киев-Харьков , 2003. – 889 с.
5. Гришин В.А., Снисаренко В.И. Нелинейные модели берегоукрепительных сооружений. – Киев: МП «Леся», 2007. – 272 с.
6. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976.- 96 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
8. Ильюшин А.А. Пластичность. - М.: ГИТТЛ, 1948. - 376 с.
9. Клаф Р.У. Метод конечных элементов в решении плоской задачи теории упругости. – В кн.: Расчет строительных конструкций с применением электронных машин. – М.: Госстройиздат. 1967. – С.142-171.
10. Немчинов Ю.И. Метод пространственных конечных элементов (С приложениями к расчету зданий и сооружений). – Киев: НИИСтроительных конструкций, 1995. – 367 с.
11. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: Изд-во «Сталь», 2002. – 600 с.
12. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.:Судостроение, 1974.- 342 с.
13. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. – Л.: Энергия, 1971. - 206 с.
14. Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. – М. : Наука, 1975. – 173 с.
15. Zienkiewicz O.C., Taylor R.I. The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 1: The Basis. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 306 pp.
16. Zienkiewicz O.C., Taylor R.I. The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 2: Solid Mechanics. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 689 pp.

Г Л А В А 3

СТАНДАРТНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

3.1. Треугольные элементы

3.1.1. Наиболее простой и исторически первый конечный элемент - треугольный плоский элемент с узлами в вершинах [3], который приведен на рис.2.1. Именно на этом элементе подробно продемонстрируем все процедуры, связанные с формированием матриц, его характеризующих. Большинство из этих процедур носят общий характер и могут быть полностью или фрагментарно использоваться для получения матриц элементов других типов и размерностей.

Как известно, напряженно-деформированное состояние элемента однозначно определяется перемещениями всех его точек, которые в соответствии с процедурой МКЭ выражаются с помощью интерполяционной матрицы $[C]$ через перемещения узлов (2.12). Вектор узловых перемещений треугольного элемента

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)} \right\}, \quad (3.1)$$

где $\{q\}_i^{(k)} = \left\{ q_1^{(k)} \ q_2^{(k)} \right\} = \{u_k \ v_k\}$ - вектор перемещений k -го узла ($k=1,2,3$).

Матрица интерполяционных функций будет иметь три блока по числу узлов элемента

$$[C] = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} \right]. \quad (3.2)$$

Напомним, что с помощью этой матрицы осуществляется связь между узловыми перемещениями и перемещениями в области элемента

$$\{u\} = [C] \{q\}_i. \quad (3.3)$$

Для плоской задачи вектор перемещений любой точки деформируемого тела, каким в данном случае является конечный элемент, определяется двумя составляющими $\{u\} = \{u(x, y) \ v(x, y)\}$ в направлении осей x и y соответственно.

Поскольку эти составляющие зависят лишь от соответствующих компонент вектора $\{q\}_i$, представим их в виде суммы Рэлея-Ритца [1]

$$\begin{aligned} u(x, y) &= C_1(x, y)u_1 + C_2(x, y)u_2 + C_3(x, y)u_3; \\ v(x, y) &= C'_1(x, y)v_1 + C'_2(x, y)v_2 + C'_3(x, y)v_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $C_k(x, y), C'_k(x, y)$ ($k=1,2,3$) – интерполяционные функции, так как именно они связывают перемещения узлов с перемещениями внутренних точек элемента.

В матричной форме выражение (3.4) записывается следующим образом

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(x, y) & 0 & C_2(x, y) & 0 & C_3(x, y) & 0 \\ 0 & C'_1(x, y) & 0 & C'_2(x, y) & 0 & C'_3(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.5)$$

Сопоставляя выражения (3.2), (3.3) и (3.5), каждый из блоков интерполяционной матрицы (3.2) запишем так

$$[C]^{(k)} = \begin{bmatrix} C_k(x, y) & 0 \\ 0 & C'_k(x, y) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Каждая из подматриц (3.6) связывает перемещения точек внутри элемента с перемещениями соответствующей k -ой узловой точки.

3.1.2. Если в выражение (3.4) подставить, например, $x = x_k$ и $y = y_k$, то, поскольку в этом случае должны выполняться очевидные соотношения

$$u(x_k, y_k) = q_1^{(k)} = u_k; \quad v(x_k, y_k) = q_2^{(k)} = v_k, \quad (3.7)$$

оказывается, что

$$C_j(x_k, y_k) = C'_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{при } j = k; \\ 0, & \text{при } j \neq k. \end{cases} \quad (3.8)$$

Таким образом, каждая интерполяционная функция должна удовлетворять следующему требованию: в рассматриваемом узле она равняется единице, во всех остальных – нулю. Заметим, что именно поэтому диагональные элементы подматрицы в (3.6) равны между собой и матрицу $[C]_j$ можно представить в виде

$$[C]_i = [E_2 C_1(x, y) E_2 C_2(x, y) E_2 C_3(x, y)], \quad (3.9)$$

где, например, $[C]^{(k)} = E_2 C_k(x, y)$, E_2 - единичная матрица второго порядка.

3.1.3. Построение интерполяционных функций можно осуществить несколькими способами. Наиболее простой и распространенный прием состоит в том, что сначала задаются законом распределения перемещения по области элемента, который выбирают обычно в виде степенного полинома. Так, в рассматриваемом случае плоской задачи можно записать

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 y + \alpha_7 xy + \dots; \\ v(x, y) &= \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_6 y + \alpha_8 xy + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Полиномы (3.10) должны, по-видимому, удовлетворять определенным требованиям.

Во-первых, на каждой стороне элемента, где величины x и y связаны некоторой зависимостью, полиномы являются функциями одной переменной и обеспечивают непрерывность перемещений при переходе от элемента к элементу. Это означает, что их степень относительно координаты по оси, совмещенной со стороной элемента, определяется заданным числом узловых точек на этой стороне. Действительно, если смежные элементы взаимодействуют в двух узловых точках, то, считая перемещения этих точек равными, получаем, что непрерывность будет обеспечена только тогда, когда на каждой стороне перемещения будут представлены полиномами первой степени, поскольку между двумя точками можно провести только одну прямую. Если же таких точек на каждой стороне элемента $p + 1$, то полиномы должны быть степени p . Следует отметить, что на каждой стороне элемента должно быть одинаковое число узловых точек.

Во-вторых, при подстановке в (3.10) координат узловых точек должны выполняться соотношения (3.7). Это означает, что число членов, удерживаемых в полиномах, не произвольно, а равно числу узловых перемещений.

В рассматриваемом случае $\{a\}_i$ содержит шесть компонент, поэтому в соотношениях (3.10) можно сохранить только по три члена. Но поскольку для треугольного элемента с узлами в вершинах эти полиномы должны быть первой степени, получаем

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 y; \quad v(x, y) = \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_6 y. \quad (3.11)$$

3.1.4. Располагая требованиями к интерполяционным функциям и полиномам, через которые они определяются, можно найти интерполяционную матрицу $[C]$. Для этого соотношения (3.10) представим в матричной форме

$$\{u\} = [A]\{\alpha\}_i, \quad (3.12)$$

где $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix};$

$\{\alpha\}_i = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots\}$ - вектор неопределенных коэффициентов.

Из выражения (3.12) с учетом (3.7) следует, что

$$\{q\}_i = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.13)$$

или в компактной форме

$$\{q\}_i = [Q]_i \{\alpha\}_i. \quad (3.14)$$

Отсюда

$$\{\alpha\}_i = [Q]_i^{-1} \{q\}_i, \quad (3.15)$$

и из (3.12) получим

$$\{u\} = [A][Q]_i^{-1} \{q\}_i. \quad (3.16)$$

Сравнивая (3.16) с (3.3), находим интерполяционную матрицу

$$[C] = [A][Q]_i^{-1}. \quad (3.17)$$

3.1.5. Рассмотрим иной путь получения интерполяционных функций, позволяющий, как это будет показано ниже, значительно упростить технику их определения.

Подставив в (3.11) координаты узловых точек, получим узловые перемещения. Введем значения этих перемещений в (3.5). После несложных алгебраических преобразований найдем

$$\begin{aligned} C_1(x, y) + C_2(x, y) + C_3(x, y) &= 1; & C_1(x, y)x_1 + C_2(x, y)x_2 + C_3(x, y)x_3 &= x; \\ C_1(x, y)y_1 + C_2(x, y)y_2 + C_3(x, y)y_3 &= y \end{aligned} \quad (3.18)$$

или в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} I \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & I \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1(x, y) \\ C_2(x, y) \\ C_3(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (3.19)$$

Откуда

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y) \\ C_2(x, y) \\ C_3(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & I \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} I \\ x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

Соотношение (3.20) имеет определенный физический смысл. Обращая в (3.20) квадратную матрицу и осуществляя матричное перемножение, найдем

$$C_1(x, y) = \frac{I}{2\Delta_i}(a_1 + b_1x + c_1y); \quad C_2(x, y) = \frac{I}{2\Delta_i}(a_2 + b_2x + c_2y); \quad (3.21)$$

$$C_3(x, y) = \frac{I}{2\Delta_i}(a_3 + b_3x + c_3y),$$

где $2\Delta_i = \det \begin{vmatrix} I & x_1 & y_1 \\ I & x_2 & y_2 \\ I & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ - удвоенная площадь треугольника;

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2; \quad a_2 = x_3y_1 - x_1y_3;$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1; \quad b_1 = y_2 - y_3; \quad b_2 = y_3 - y_1;$$

$$b_3 = y_1 - y_2; \quad c_1 = x_3 - x_2; \quad c_2 = x_1 - x_3;$$

$$c_3 = x_2 - x_1.$$

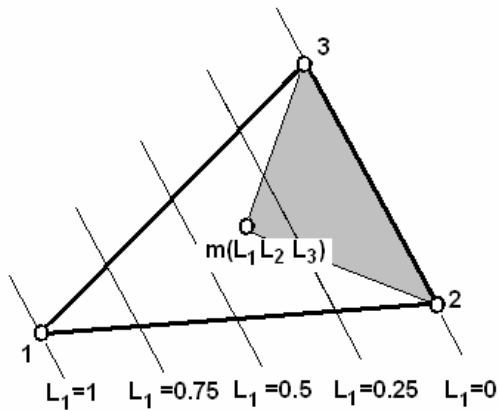


Рис.3.1. Местные координаты для треугольника

Физический смысл выражений (3.20) заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение площади соответствующего заштрихованного треугольника к площади всего треугольного конечного элемента (рис. 3.1), т.е.

$$C_1(x, y) = \frac{\Delta_{m23}}{\Delta_i}, \quad C_2(x, y) = \frac{\Delta_{m31}}{\Delta_i}, \quad (3.22)$$

$$C_3(x, y) = \frac{\Delta_{m12}}{\Delta_i}$$

Функции, определенные соотношением (3.22), называют L – координатами и являются нормализованными координатами для треугольника (см.п. 2.2.6). Таким образом,

$$L_1 = C_1(x, y); \quad L_2 = C_2(x, y); \quad L_3 = C_3(x, y). \quad (3.23)$$

Значения L - координат находятся в интервале 0-1, они удовлетворяют требованиям, аналогичным (3.8)

$$L_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1 & , j = k; \\ 0 & , j \neq k. \end{cases} \quad (3.24)$$

Отметим, что из трех L -координат только две являются независимыми, поскольку между ними существует вполне очевидная связь

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (3.25)$$

Кстати, нормализованные L -координаты для треугольника известны еще со времен Древней Греции [5], тогда их называли “барицентрическими” координатами.

В дальнейшем именно L - координаты будут использоваться для интерполяции узловых перемещений в область тех конечных элементов, которые отображаются на треугольник.

3.1.6. Матрицу жесткости конечного элемента треугольной формы получим, следуя стандартным процедурам главы 2.

Согласно выражению (2.15), матрица деформаций $[B] = [\Phi][C]$ является блочной, стандартный блок которой, имея в виду (1.10),

$$[B]^{(k)} = [\Phi]C_k(x, y) = \frac{1}{2\Delta_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3.26)$$

Матрицу $[D]$ (1.9), осуществляющую связь между напряжениями и деформациями, запишем в общем виде, как для анизотропного материала

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Матрица жесткости конечного элемента имеет также блочную структуру (2.11) и в данном случае будет выглядеть так

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Типовой блок этой матрицы размером 2x2 определяется по формуле (2.24), в котором, если предположить, что толщина элемента постоянна, интегрирование по объему заменяется интегрированием по площади

$$[K]_{ij}^{(k)} = h_i \iint_{\Delta_i} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} dx dy, \quad (3.29)$$

где h_i - толщина i -го элемента.

В (3.29) матрицы, стоящие под знаком интеграла, не содержат переменных x и y , поэтому

$$[K]_{ij}^{(k)} = \Delta_i h_i ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)}. \quad (3.30)$$

Подразумевается также, что матрица $[D]$ постоянна по области элемента.

Осуществляя матричные перемножения и опуская промежуточные выкладки, запишем окончательное выражение для стандартного блока матрицы жесткости

$$[K]_{ij}^{(k)} = \frac{h_i}{4\Delta_i} \begin{bmatrix} b_j(D_{11}b_k + D_{13}c_k) + c_j(D_{13}b_k + D_{33}c_k) & b_j(D_{13}b_k + D_{12}c_k) + c_j(D_{33}b_k + D_{23}c_k) \\ b_j(D_{13}b_k + D_{33}c_k) + c_j(D_{12}b_k + D_{23}c_k) & b_j(D_{33}b_k + D_{23}c_k) + c_j(D_{23}b_k + D_{22}c_k) \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Заметим, что впервые матрица жесткости для такого элемента была получена в работе [6].

3.1.7. Теперь приведем объемные и поверхностные силы, а также начальные деформации к статически эквивалентным узловым силам.

Вектор-столбец узловых сил для плоского i -го элемента треугольной формы, отвечающий объемным силам интенсивностью $\{G_V\} = \{X_V Y_V\}$, имеет блочное строение

$$\{P_V\}_i = \left\{ \{P_V\}_i^{(1)} \{P_V\}_i^{(2)} \{P_V\}_i^{(3)} \right\}.$$

Типовой блок этого вектора $\{P_V\}_i^{(k)} = \{P_{1V}^{(k)} P_{2V}^{(k)}\}$, согласно формуле (2.27), запишется в виде

$$\{P_V\}_i^{(k)} = h_i \iint_{\Delta_i} C_k(x, y) \{G_V\} dx dy, \quad (3.32)$$

В том случае, когда объемные силы являются постоянными

$$\{P_V\}_i^{(k)} = h_i \{G_V\} \iint_{\Delta_i} C_k(x, y) dx dy, \quad (3.33)$$

нетрудно произвести интегрирование в замкнутом виде. Особенно просто это выполняется, если начало координат выбирается в центре тяжести элемента. Тогда [2]

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0; \quad a_1 = a_2 = a_3 = \frac{2\Delta_i}{3}; \quad \iint_{\Delta_i} x dx dy = \iint_{\Delta_i} y dx dy = 0.$$

Поэтому, имея в виду (3.21),

$$\{P_V\}_i^{(k)} = h_i \{G_V\} \iint_{\Delta_i} \frac{1}{2\Delta_i} (a_k + b_k x + c_k y) dx dy = \frac{\Delta_i}{3} h_i \{G_V\}, \quad (3.34)$$

т.е. узловые силы, статически эквивалентные объемным силам, действуют в направлении осей x, y и распределяются между узлами элемента равномерно.

Перейдем к рассмотрению i -го элемента, расположенного на границе области, и допустим, что по одной из его сторон действуют поверхностные силы P_x и P_y , являющиеся компонентами вектора-функции $\{p_s\}$. Соответствующий этим поверхностным силам вектор-столбец узловых сосредоточенных сил имеет блочное строение (2.29) и равен

$$\{P_S\}_i = \left\{ \{P_S\}_i^{(1)} \{P_S\}_i^{(2)} \{P_S\}_i^{(3)} \right\}, \quad (3.35)$$

где каждый из блоков $\{P_S\}_i^{(k)} = \{P_{1S}^{(k)} P_{2S}^{(k)}\}$ будет иметь вид

$$\{P_S\}_i^{(k)} = h_i \int_{S_i} C_k(x, y) \{p_s\} dS, \quad (3.36)$$

и, если поверхностные силы постоянны, то

$$\{P_S\}_i^{(k)} = h_i \{p_s\} \int_{S_i} C_k(x, y) dS. \quad (3.37)$$

Если i -й элемент подвергается начальной деформации $\{\varepsilon_t\}$, то вектор-столбец узловых сил, эквивалентный этому воздействию, равен $\{P_t\}_i = \{\{P_t\}_i^{(1)} \{P_t\}_i^{(2)} \{P_t\}_i^{(3)}\}$; где $\{P_t\}_i^{(k)} = \{P_{1t}^{(k)} P_{2t}^{(k)}\}$. Типовой блок этого вектора определяется с помощью уравнения (2.33)

$$\{P_t\}_i^{(k)} = h_i \iint_{\Delta_i} ([B]^{(k)})^T [D] \{\varepsilon_t\} dx dy. \quad (3.38)$$

Таким образом, получены все необходимые для реализации МКЭ зависимости, связанные с конечным элементом треугольной формы.

3.1.8. Описанный треугольный элемент характеризуется линейным законом изменения перемещений по области. Т.к. деформации в пределах элемента связаны с перемещениями известными дифференциальными зависимостями (1.2), то они будут, в свою очередь, постоянными по области элемента. Напряжения в соответствии с определяющими соотношениями (1.3) также постоянны. Во многих задачах точность такого представления деформаций и напряжений, которые от элемента к элементу меняются скачкообразно, недостаточна. В этом случае используют элементы с дополнительными узлами, позволяющие повысить порядок интерполяционных полиномов, и, следовательно, задать распределение деформаций и напряжений по линейному, квадратичному и т.д. законам. Это одновременно повышает точность решения без увеличения числа элементов. Обычно дополнительные узлы вводят по сторонам элемента, хотя не исключается возможность их введения и внутри элемента. Если ввести на каждой стороне треугольника по одному дополнительному узлу, то степень интерполяционных полиномов повышается до двух, если по два узла – до трех, и т.д. В отличие от описанного ранее, так называемого, элемента первого порядка с тремя узлами по углам, такие элементы носят название элементов второго, третьего и т.д. порядков. Примеры элементов различных порядков представлены на рис.3.2.

Рассмотрим, например, элемент второго порядка (рис.3.2) с одним промежуточным узлом на каждой из сторон. Число независимых компонент узловых перемещений в этом случае становится равным 12, следовательно, полиномы для описания перемещений по области элемента (3.4) должны иметь 12 неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 y + \alpha_7 xy + \alpha_9 x^2 + \alpha_{11} y^2; \\ v(x, y) &= \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_6 y + \alpha_8 xy + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{12} y^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

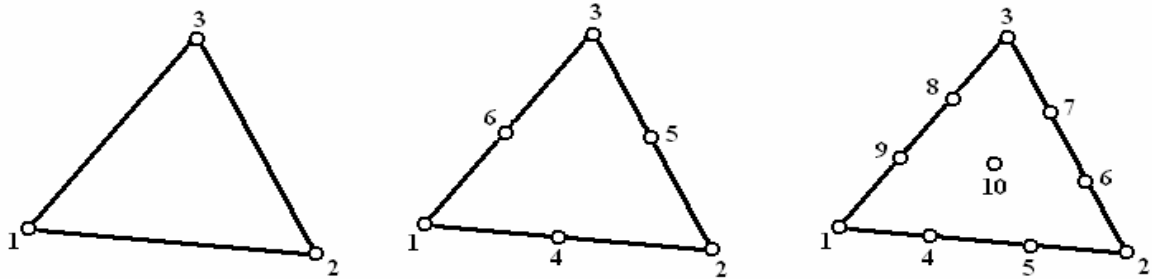


Рис.3.2. Треугольные элементы первого, второго и третьего порядков

Нетрудно убедиться, что (3.39) обеспечивает неразрывность перемещений на границах элементов, т.к. на каждой из сторон элемента перемещения будут описываться квадратной параболой, однозначно определяемой параметрами в трех узлах этой стороны.

Если теперь провести преобразования, аналогичные последовательности формул (3.11)-(3.17), то можно получить интерполяционную матрицу в виде (3.17), компонентами которой будут интерполяционные функции от x и y .

Однако, описанный прием редко используется для нелинейной интерполяции по области элемента. Обычно для этих целей применяются нормализованные L -координаты (3.23), являющиеся естественными для треугольника. Приведем интерполяционные функции в этих координатах для элементов, изображенных на рис.3.2 [2].

Для элемента второго порядка (рис.3.2б):

для угловых узлов

$$C_k(L_k) = (2L_k - 1)L_k, (k=1,2,3); \quad (3.40)$$

для узлов на сторонах

$$C_k(L_j, L_n) = 4L_j L_n, (k=4,5,6), \quad (3.41)$$

где j, n – номера угловых узлов на той же стороне.

Для элемента третьего порядка (рис.3.2в):

для угловых узлов

$$C_k(L_k) = \frac{1}{2}(3L_k - 1)(3L_k - 2)L_k, (k=1,2,3); \quad (3.42)$$

для узлов на сторонах

$$C_k(L_j, L_n) = \frac{9}{2}L_j L_n (3L_j - 1), (k=4, \dots, 9), \quad (3.43)$$

где j - номер ближайшего углового узла на рассматриваемой стороне, n - дальнего; для центрального узла

$$C_{10}(L_1, L_2, L_3) = 27 L_1 L_2 L_3. \quad (3.44)$$

Основной особенностью всех перечисленных интерполяционных функций является то обстоятельство, что они равны единице в данном узле и нулю во всех остальных.

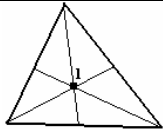
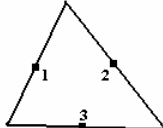
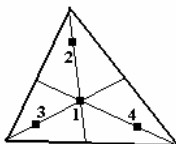
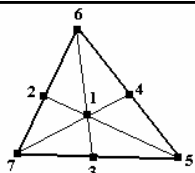
3.1.9. Определив интерполяционные функции, можно построить матрицу деформаций по формуле (2.15). Типовой блок матрицы жесткости, по-прежнему, вычисляется по формуле (2.24). Однако, при этом следует учесть, что интерполяционные функции сформулированы в местной, нормализованной системе координат, отличной от общей. Можно, конечно, воспользоваться соотношениями (3.23), выразив местные L - координаты через общие и подставив полученные выражения в формулы для C_k . Но можно осуществить преобразование координат и до вычисления интеграла.

При преобразовании координат, связанном с определением частных производных $\frac{\partial C_k}{\partial x}, \frac{\partial C_k}{\partial y}$, следует иметь в виду, что не все L - координаты являются независимыми, между ними существует связь (3.25). Выберем в качестве независимых координат координаты L_1 и L_2 , тогда частные производные равны

$$\frac{\partial C_k}{\partial L_1} = \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L_1}; \quad \frac{\partial C_k}{\partial L_2} = \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L_2}$$

или в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial C_k}{\partial L_1} \\ \frac{\partial C_k}{\partial L_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial C_k}{\partial x} \\ \frac{\partial C_k}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial C_k}{\partial x} \\ \frac{\partial C_k}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (3.45)$$

Порядок элемента	Точки интегрирования	Узлы	L-координаты	Весовые коэффициенты Н
Первый		1	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Второй		1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{6}$
		2	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
		3	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
Третий		1	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{27}{96}$
		2	$\frac{11}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}$	$\frac{25}{96}$
		3	$\frac{2}{15}, \frac{11}{15}, \frac{2}{15}$	$\frac{25}{96}$
		4	$\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{11}{15}$	$\frac{25}{96}$
Не рекомендуется из-за отрицательного весового коэффициента и ошибок округления [2]				
Третий		1	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{27}{120}$
		2	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{8}{120}$
		3	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{8}{120}$
		4	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{8}{120}$
		5	1,0,0	$\frac{3}{120}$
		6	0,1,0	$\frac{3}{120}$
		7	0,0,1	$\frac{3}{120}$

В (3.45) квадратная матрица $[J]$ носит название матрицы Якоби. Обращая ее, получим искомые производные в общих координатах

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial C_k}{\partial x} \\ \frac{\partial C_k}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial C_k}{\partial L_1} \\ \frac{\partial C_k}{\partial L_2} \end{Bmatrix}. \quad (3.46)$$

Чтобы учесть зависимую координату L_3 можно переписать все функции через L_1 и L_2 , а можно воспользоваться очевидными соотношениями, заменив производные в (3.46) на

$$\frac{\partial C_k}{\partial L_1} \rightarrow \frac{\partial C_k}{\partial L_1} - \frac{\partial C_k}{\partial L_3}; \quad \frac{\partial C_k}{\partial L_2} \rightarrow \frac{\partial C_k}{\partial L_2} - \frac{\partial C_k}{\partial L_3}.$$

3.1.10. Матрица Якоби $[J]$ в выражении (3.45) содержит производные, получение которых требует явного задания общих координат в виде функции местных L -координат. Эта связь осуществляется по формуле (3.19) с учетом (3.23), т.е.

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3; \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Здесь x_k, y_k ($k=1,2,3$) – координаты вершин треугольника.

3.1.11. Интегралы по площади в выражениях для матрицы жесткости и векторов узловых сил после замены переменных должны вычисляться по формуле [2]

$$I = \int_0^{1-L_1} \int_0^L f(L_1, L_2, L_3) \det|J| dL_1 dL_2, \quad (3.48)$$

где $\det|J|$ – определитель матрицы Якоби.

В принципе, матрицы для элементов могут быть определены в явном виде путем вычисления соответствующих интегралов. И хотя, при этом не возникает

принципиальных трудностей, тем не менее, выражения получаются весьма громоздкими. Поэтому рекомендуется интегралы (3.48) определять численно. Процедура численного интегрирования по площади аналогична процедуре для одномерного интегрирования, описанной в п. П.6.1

$$I \approx \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s H f(L_1, L_2, L_3). \quad (3.49)$$

Весовые коэффициенты H квадратуры (3.49) для треугольника при различном числе точек интегрирования (рис.3.3) приведены в табл.3.1, которую предложили Хаммер и др. [2].

Особо отметим, что при применении численного интегрирования сложность подынтегрального выражения уже не имеет принципиального значения. Поэтому матрицу механических характеристик можно также принять зависящей от координат, т.е. представить в виде функции $[D(L_1, L_2, L_3)]$. Это бывает очень важно, например, при решении физически нелинейных задач, когда число точек, в которых вычисляются характеристики материала, зачастую определяет точность полученных результатов расчета.

3.2. Четырехугольные элементы

3.2.1. Иногда конфигурация области такова, что ее удастся описать элементами прямоугольной формы (рис. 3.3) [6]. При этом, число элементов, как правило, меньше, чем при аппроксимации ее треугольниками.

Вектор узловых перемещений прямоугольного элемента

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)} \{q\}_i^{(4)} \right\}, \quad (3.50)$$

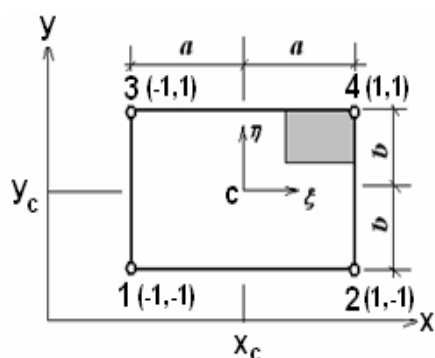


Рис.3.3. Прямоугольный элемент

где $\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)} q_2^{(k)}\} = \{u_k v_k\}$ - вектор перемещений k -го узла.

Матрица интерполяционных функций будет иметь четыре блока

$$[C] = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)} \right], \quad (3.51)$$

где $[C]^{(k)} = E_2 C_k(x, y)$, E_2 - единичная матрица второго порядка.

В рассматриваемом случае вектор $\{q\}_i$ содержит восемь компонент, поэтому в

полиномах для описания поля перемещений по области должно быть также восемь членов, т.е.

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 y + \alpha_7 xy; \quad v(x, y) = \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_6 y + \alpha_8 xy. \quad (3.52)$$

Опуская промежуточные выкладки, аналогичные приведенным в п. 3.1.5, запишем выражения для интерполяционных функций, похожие на (3.20)

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y) \\ C_2(x, y) \\ C_3(x, y) \\ C_4(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 & x_4 y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{Bmatrix}. \quad (3.53)$$

Однако, как было показано в случае треугольника, характеристики элемента удобно формулировать не в общей x, y , а в местной нормализованной системе координат. Для прямоугольника эта система определяется двумя нормализованными координатами

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}; \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}. \quad (3.54)$$

Значения нормализованных координат находятся в пределах от -1 до +1, узловые значения координат равны ± 1 .

Перепишем соотношение (3.53) в новых координатах

$$\begin{Bmatrix} C_1(\xi, \eta) \\ C_2(\xi, \eta) \\ C_3(\xi, \eta) \\ C_4(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \xi\eta \end{Bmatrix}. \quad (3.55)$$

Откуда

$$\begin{aligned} C_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); & C_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \\ C_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta); & C_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Зависимости (3.56) могут быть объединены формулой

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta), \quad (k=1, 2, 3, 4), \quad (3.57)$$

по которой вычисляются интерполяционные функции для типового узла, входящие в выражение (3.51).

Кстати, зависимость (3.57) может быть представлена в виде произведения одномерных интерполяционных полиномов Лагранжа (см. формулу (П.66))

$$C_k(\xi, \eta) = N^{(k)}(\xi) N^{(k)}(\eta), \quad (3.58)$$

$$\text{где } N^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi); \quad N^{(k)}(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta_k \eta).$$

3.2.2. Матрицу жесткости конечного элемента прямоугольной формы получим, следуя рекомендациям гл. 2.

Согласно выражению (2.15) матрица деформаций $[B] = [\Phi][C]$ содержит четыре блока по числу узлов

$$[B] = \left[[B]^{(1)} [B]^{(2)} [B]^{(3)} [B]^{(4)} \right],$$

стандартный блок ее, имея в виду (1.10), равен

$$[B]_i^{(k)} = [\Phi] C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta) & 0 \\ 0 & \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi) \\ \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi) & \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta) \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Следовательно, матрица жесткости элемента также блочная и имеет вид

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

каждый из блоков которой может быть вычислен по формуле (3.29)

$$[K]_{ij}^{(k)} = h_i ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} d\xi d\eta. \quad (3.61)$$

Произведя матричное перемножение и интегрируя почленно, можно получить

$$[K]_{ij}^{(k)} = \frac{h_i}{4} \begin{bmatrix} D_{11}\theta_{11} + D_{13}(\theta_{12} + \theta_{21}) + D_{33}\theta_{22} & D_{12}\theta_{12} + D_{13}\theta_{22} + D_{23}\theta_{11} + D_{33}\theta_{21} \\ D_{12}\theta_{21} + D_{13}\theta_{22} + D_{23}\theta_{11} + D_{33}\theta_{12} & D_{22}\theta_{22} + D_{23}(\theta_{12} + \theta_{21}) + D_{33}\theta_{11} \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

где

$$\theta_{11} = \frac{b}{a} \xi_j \xi_k \left(1 + \frac{1}{3} \eta_j \eta_k\right); \quad \theta_{22} = \frac{a}{b} \eta_j \eta_k \left(1 + \frac{1}{3} \xi_j \xi_k\right); \quad \theta_{12} = \xi_j \eta_k; \quad \theta_{21} = \xi_k \eta_j.$$

Здесь также подразумевается постоянство матрицы $[D]$ в пределах элемента.

Заметим, что все остальные расчетные величины, относящиеся к прямоугольному конечному элементу первого порядка (узловые усилия, матрица инерции и т.п.), могут быть достаточно просто получены по формулам п. 3.1.

Необходимо обратить внимание на одну существенную деталь, характерную для данного элемента, связанную с особенностью интерполяции распределения перемещений по его области по формуле (3.52). Дифференцирование выражений, входящих в эту формулу, по x и y дает линейную функцию. Тогда, согласно выражению (1.10), деформации по области элемента распределяются по линейному закону. Это обстоятельство накладывает свой отпечаток на интерпретацию результатов расчета, поскольку требует не менее четырех точек внутри элемента, в которых будут вычисляться деформации, а по ним и напряжения. Кроме того, часть компонент деформаций вдоль границ постоянна, например, $\varepsilon_x = \alpha_3 + \alpha_7 y$ вдоль горизонтальных границ. И эти деформации при переходе от элемента к элементу терпят разрыв. Поэтому рекомендуется деформации по области элемента принимать приближенно постоянными и определять их только в центре тяжести. Конечно же, при этом, переход от элемента к элементу будет сопровождаться скачком уже всех компонент деформаций и напряжений, с чем приходится мириться.

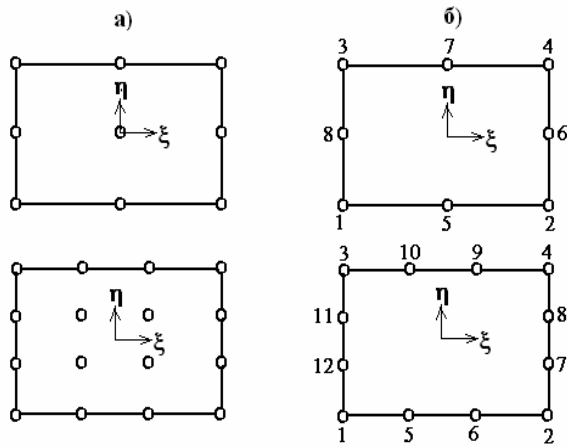


Рис.3.4. Элементы второго и третьего порядков лагранжева (а) и сирендипова (б) семейств.

3.2.3. Точность расчетов при использовании прямоугольных элементов может быть повышена так же, как и при использовании треугольных, введением дополнительных узлов. Это позволяет повысить степень интерполяционных полиномов. Построение этих полиномов может быть осуществлено несколькими способами. Так, например, интерполяционная функция может быть представлена в виде (3.58), как произведение одномерных интерполяционных полиномов, для каждого из которых применяется интерполяция по Лагранжу (П.66), поэтому интерполяция типа (3.58)

носит название лагранжевой. Порядок полиномов определяет и порядок элемента. Так, прямоугольный элемент с четырьмя узлами, для которого интерполяционный полином имеет вид (3.57), относится к элементам первого порядка. Легко видеть, что и в этом случае формула (3.58) выражает отношение площадей заштрихованного и всего прямоугольника (рис.3.3). Полиномы для элементов второго, третьего и т.д. можно получить непосредственно, перемножив одномерные лагранжевы полиномы того же порядка, избежав процедуры обращения матрицы типа (3.55). Однако, при этом неизбежно появление узлов внутри элемента (рис.3.4а), которые не будут никак связаны с узлами соседних элементов. Как правило, этой ситуации стараются избежать. На помощь приходят интерполяционные полиномы, так называемого, сирендипова семейства (рис.3.4б) [2]. Четырехугольный же элемент, для которого справедливы соотношения (3.57) является, по существу, элементом первого порядка не только лагранжева, но и сирендипова семейства.

Для элемента второго порядка с 8 узлами сирендиповы полиномы равны: угловые узлы

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)(\xi\xi_k + \eta\eta_k - 1); \quad (3.63)$$

узлы на сторонах

$$\xi_k = 0, \quad C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_k\eta), \quad k=5,7; \quad (3.64)$$

$$\eta_k = 0, \quad C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi_k\xi)(1 - \eta^2), \quad k=6,8. \quad (3.65)$$

Элементы третьего порядка с 12 узлами:

угловые узлы

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k) \left[9(\xi^2 + \eta^2) - 10 \right]; \quad (3.66)$$

узлы на сторонах

$$\xi_k = \pm 1, \eta_k = \pm \frac{1}{3}, \quad C_k(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 + \xi_k\xi)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_k\eta), \quad k=7,8,11,12; \quad (3.67)$$

$$\xi_k = \pm \frac{1}{3}, \eta_k = \pm 1, \quad C_k(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 + \eta_k\eta)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_k\xi), \quad k=5,6,9,10. \quad (3.68)$$

Эти функции были найдены путем подбора из условия (3.8). В принципе функции сирендипова семейства могут быть получены и для элементов более высокого порядка, но процесс этот достаточно трудоемкий, и зачастую, не имеющий смысла, т.к. элементы выше третьего порядка используются крайне редко.

Иногда требуется задание различных степеней свободы в направлениях ξ и η . Такие элементы могут потребоваться при изучении, например, задач изгиба, когда в направлении одной из координат перемещения могут описываться по линейному закону. Такие элементы будут рассмотрены далее.

3.2.4. После того, как построены интерполяционные полиномы, следует определить матрицу деформаций (2.15), имея в виду, что $\frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial C_k}{\partial \xi}$, $\frac{\partial C_k}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial C_k}{\partial \eta}$. Располагая этой матрицей, можно построить все остальные матрицы для элемента. При взятии определенного интеграла необходимо осуществить замену переменных, т.е. каждый из них должен иметь вид

$$I = abh_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3.69)$$

Для элементов, порядок которых выше двух, определенный интеграл (3.69) берется численно. Для этого используется процедура Гаусса, когда интеграл представляется суммой [2]

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_j, \eta_i). \quad (3.70)$$

Здесь ξ_j, η_i - координаты точек интегрирования по Гауссу; H_i, H_j - весовые коэффициенты квадратуры Гаусса. Координаты точек интегрирования и весовые коэффициенты приведены в приложении (табл. П.1). Рекомендуемое число точек интегрирования для элемента первого порядка – одна точка, второго порядка –

четыре (по две в каждом направлении), третьего – девять точек (по три в каждом направлении).

3.2.5. Некоторые элементы высших порядков, как, например, треугольник третьего порядка, лагранжево семейство прямоугольников, содержат внутренние узлы, которые не взаимодействуют с соседними элементами и не участвуют в формировании матрицы жесткости всей системы. От таких узлов, желательно избавиться перед составлением ансамбля элементов. Способ исключения внутренних узлов подробно описан в [2].

3.3. Криволинейные элементы

3.3.1. В конкретных задачах нередко приходится иметь дело с телами сложной геометрии, удовлетворительное описание которой набором относительно малого числа элементов с прямолинейными сторонами ведет к существенным погрешностям. Избежать их можно введением, так называемых, криволинейных

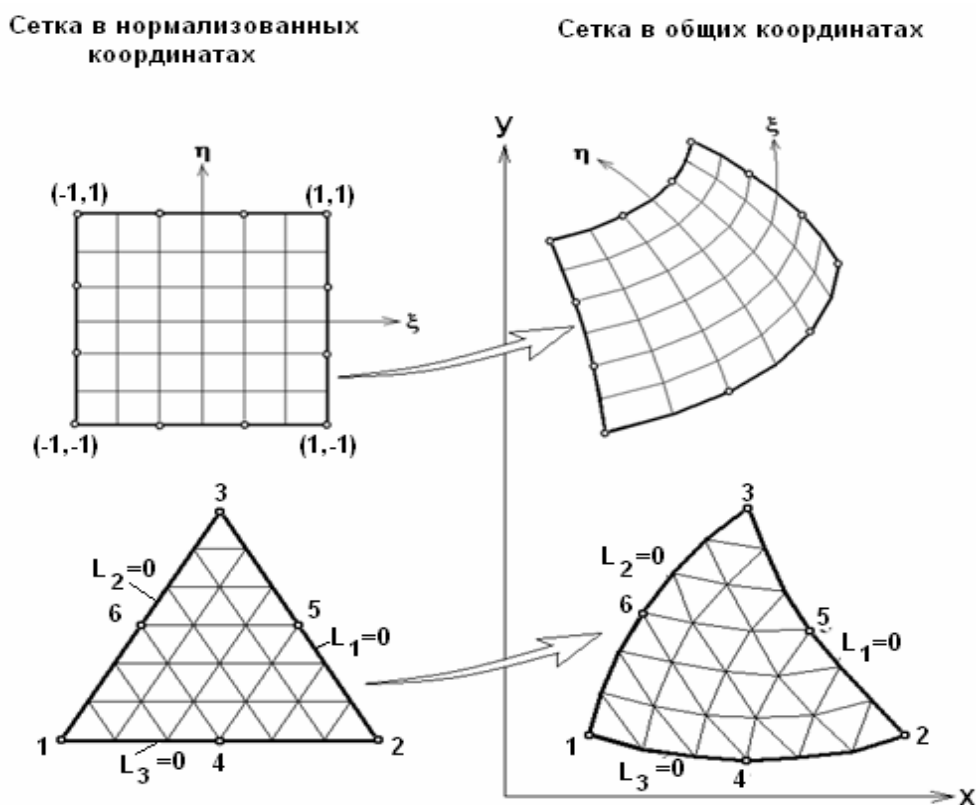


Рис.3.5. Отображение нормализованных координат в общие.

конечных элементов [2]. Эти элементы получаются отображением регулярных элементов с прямолинейными границами (рис.3.5). Это отображение удобно описывать как зависимость между местной нормированной системой координат ξ, η и общей ортогональной декартовой x, y . В работе [2] показано, что эта зависимость может быть установлена посредством тех же самых интерполяционных функций, которые использовались для интерполяции узловых перемещений в область, т.е.

$$\begin{aligned} x &= C_1 x_1 + \dots + C_k x_k + \dots + C_n x_n; \\ y &= C_1 y_1 + \dots + C_k y_k + \dots + C_n y_n, \end{aligned} \quad (3.71)$$

где C_k – интерполяционная функция в местной системе координат; x_k, y_k – общие координаты узлов элемента; n – число узлов элемента.

Такой подход обеспечивает непрерывную аппроксимацию тела криволинейными элементами, точность которой предопределяется выбранным числом узлов. Если число узлов для описания геометрии элемента совпадает с числом узлов для описания перемещений, то такие элементы называются изопараметрическими. Когда число узлов для задания геометрии элемента больше числа узлов для задания перемещений, элементы называются суперпараметрическими, наоборот – субпараметрическими. Элементы второго, третьего и т.д. порядков, описанные в разделе 2.2. относятся к последнему типу.

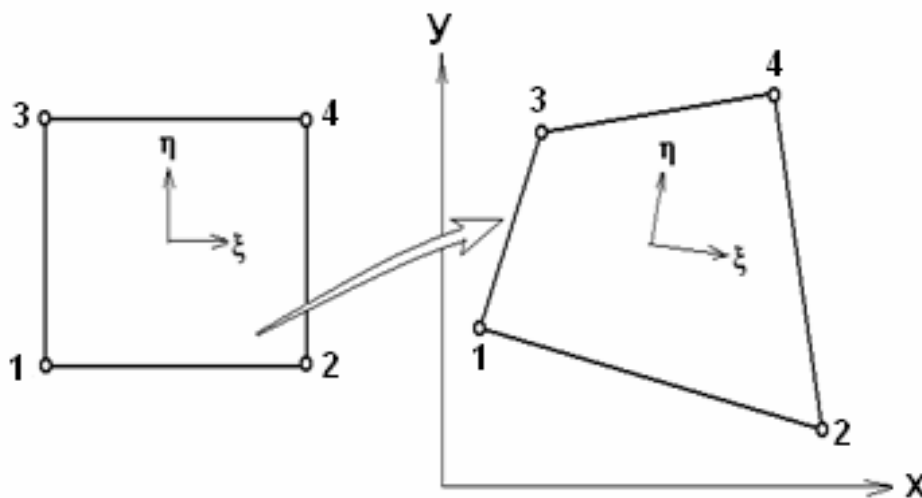


Рис.3.6. Отображение прямоугольного элемента

Отображение иногда целесообразно использовать и для элементов первого порядка, например, чтобы преобразовать прямоугольник в четырехугольник общего вида (рис.3.6).

3.3.2. Матрицы, характеризующие криволинейные элементы, получаются по общим формулам, в которые входят определенные интегралы по площади элемента. После замены переменных с переходом в нормированную систему координат, например, ξ, η этот интеграл будет выглядеть так

$$I = h_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det|J| d\xi d\eta. \quad (3.72)$$

Здесь $\det|J|$ - определитель матрицы Якоби.

Сама же матрица Якоби, осуществляющая преобразование координат, с учетом (3.71), равна

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial C_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial C_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial C_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial C_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \xi} & \frac{\partial C_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial C_1}{\partial \eta} & \frac{\partial C_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

где n - число узлов, используемых для описания геометрии элемента.

При использовании L -координат требуется предварительное исключение одной зависимой переменной, например L_3 , о чем уже писалось ранее в п. 3.1.9.

Естественно, что в данном случае должно использоваться численное интегрирование. Процедуры численного интегрирования ничем не отличаются от приведенных в п. 3.1.11 и п.3.2.4.

Отметим также, что, как и в случае треугольных элементов, применение численного интегрирования позволяет задать матрицу механических характеристик материала в виде функции от координат, т.е. $[D] = [D(\xi, \eta)]$.

3.3.3. Приведем пример подпрограммы для вычисления симметричной части матрицы жесткости плосконапряженного четырехугольного квадратичного элемента. Подпрограмма написана на алгоритмическом языке Фортран и является составной частью программного комплекса "Concord" [4]

```

C*****
C  П/П МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОГО 4-Х И 8-И
C  УЗЛОВОГО ЭЛЕМЕНТА (4 ТОЧКИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ)
C*****

```

```

SUBROUTINE STIF4(D,THIC,ESTIFM,XX,NE, KE)
C*****
C ВХОДНЫЕ МАССИВЫ И ПАРАМЕТРЫ:
C   XX(2,KE) – общие декартовы координаты узлов элемента
C   KE – число узлов в элементе (4 или 8)
C   THIC – толщина элемента
C   D(3,3) – матрица связи между напряжениями и деформациям, для
C           нелинейных материалов вычисляется в процессе работы п/п UPR
C РАБОЧИЕ МАССИВЫ:
C   B(3,2*KE) – матрица деформаций
C   XG(2) – нормализованные координаты точек интегрирования
C   WGT(2) – весовые коэффициенты квадратуры Гаусса
C ВЫХОДНОЙ МАССИВ;
C   ESTIFM(KE*(2*KE+1)) – симметричная часть матрицы жесткости
C*****
      REAL*8 D(3,3),XX(2,KE), B(3,2*KE),ESTIFM(KE*(2*KE+1)),X(2),XG(2),WGT(2)
      REAL*8 ES(KE*(2*KE+1))

      DATA XG/-0.577350269,0.577350269/
      DATA WGT/1.,1./

C NINT1, NINT2 – число точек интегрирования в направлении осей
      NINT1=2
      NINT2=2
      DO I=1,KE*(2*KE+1)
        ESTIFM(I)=0. ! инициализация массива
      ENDDO
      IJ=0
      DO 2 LY=1,NINT2 ! Начало цикла в одном направлении
        X(2)=XG(LY)
        DO 2 LX=1,NINT1 ! Начало цикла в другом направлении
          X(1)=XG(LX)
          IJ=IJ+1
          CALL DEFOR4(B,X,XX,YYY,KE)! матрица деформаций и Якобиан
          WT=WGT(LX)*WGT(LY)*YYY*THIC
          !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
          !!!!!ЗДЕСЬ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ МАТРИЦА D !!!!!
          !!!!! CALL UPR(D,.....) !!!!!
          !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
          CALL MBTDB(B,D,ES,2*KE,3) ! п/п произведения матриц [B]T[D][B],
          ! результат – симметричная часть
          ! матрицы жесткости ES (KE*(2*KE+1))

          DO K=1, KE*(2*KE+1)
            ESTIFM(K)=ESTIFM(K)+ES(k)* WT
          ENDDO
        ENDDO! конец циклов
      ENDDO ! по точкам интегрирования
      RETURN
      END

```

```

C*****
C   П/П МАТРИЦЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТОЧКЕ X(1), X(2)
C*****
SUBROUTINE DEFOR4(V,X,XX,YYY,KE)
C*****
C   ВХОДНЫЕ МАССИВЫ:
C   XX(2,KE) – общие декартовы координаты узлов элемента
C   X(2) - нормализованные координаты точки интегрирования
C   РАБОЧИЕ МАССИВЫ:
C   H(KE)- интерполяционные функции
C   HP(KE,2)- производные интерп. функций по нормализованным
C               координатам
C   A(2,2), YAK(2,2) - матрица Якоби и обратная ей.
C   ВЫХОДНЫЕ МАССИВЫ И ПАРАМЕТРЫ:
C   V(3,2*KE)- матрица деформаций
C   YYY – якобиан
C*****
REAL*8 V(KIS,2*KE),X(2),XP(2,KE),A(2,2),XX(2,KE)
REAL*8 HP(2,KE),YAK(2,2),H(KE)
CALL YASOV4(A,H,HP,XX,YYY,X,KE) ! п/п матрицы Якоби и якобиана
DO II=1,KE
DO I=1,2
XP(I,II)=0.
DO J=1,2
XP(I,II)=XP(I,II)+A(J,I)*HP(J,II)
ENDDO
ENDDO
ENDDO
C   матрица деформаций
DO I=1,KE
I1=2*I-1
V(1,I1)=XP(1,I)
V(2,I1)=0.
V(3,I1)=XP(2,I)
I2=I1+1
V(1,I2)=0.
V(2,I2)=XP(2,I)
V(3,I2)=XP(1,I)
ENDDO

RETURN
END

```

```

C*****
C П/П ПОСТРОЕНИЯ И ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦЫ ЯКОБИ, ЯКОБИАН
C
C*****
      SUBROUTINE YACOB4(A,H,HP,XX,YYY,X,KE)
C*****
C ВХОДНЫЕ МАССИВЫ:
C   XX(2,KE)- общие декартовы координаты узлов элемента
C   X(4) -нормализованные координаты точек интегрирования
C РАБОЧИЕ МАССИВЫ:
C   XU(8,2) – нормализованные координаты узлов элемента
C   YAK(2,2)-матрица Якоби
C ВЫХОДНЫЕ МАССИВЫ:
C   HP(2,KE)- производные интерп.функций
C   A(2,2) -обращенная матрица Якоби
C*****
      REAL*8 A(2,2),XX(2,KE),HP(2,KE), X(2), YAK(2,2),XU(8,2),XU1(4,2), H(8)
      DATA XU1/-1.,1.,-1.,1.,-1.,-1.,1.,1./
      DATA XU /-1.,1.,-1.,1.,0.,1.,0.,-1.,-1.,-1.,1.,1.,-1.,0.,1.,0./

      IF(KE.EQ.8) THEN ! восьмиузловой элемент
      X1=X(1)
      X2=X(2)
      DO I=1,4
          U1=XU(I,1)
          U2=XU(I,2)
          H(I)=(1.+X1*U1)*(1.+X2*U2)*(X1*U1+X2*U2-1.)/4.
          HP(1,I)=(1.+X2*U2)*(2*X1+X2*U2*U1)/4.
          HP(2,I)=(1.+X1*U1)*(2*X2+X1*U1*U2)/4.
      ENDDO
      DO I=5,7,2
          U1=XU(I,1)
          U2=XU(I,2)
          H(I)=(1.-X1*X1)*(1.+X2*U2)/2.
          HP(1,I)=-X1*(1.+X2*U2)
          HP(2,I)=U2*(1.-X1*X1)/2.
      ENDDO
      DO I=6,8,2
          U1=XU(I,1)
          U2=XU(I,2)
          H(I)=(1.-X2*X2)*(1.+X1*U1)/2.
          HP(1,I)=U1*(1.-X2*X2)/2.
          HP(2,I)=-X2*(1.+X1*U1)
      ENDDO
      ENDIF !конец восьмиузловой элемент
      IF(KE.EQ.4) THEN ! четырехузловой элемент
      DO I=1,4
          H(I)=0.25*(1.+XU1(I,1)*X(1))*(1.+XU1(I,2)*X(2))
          HP(1,I)=0.25*XU1(I,1)*(1.+XU1(I,2)*X(2))
          HP(2,I)=0.25*XU1(I,2)*(1.+XU1(I,1)*X(1))
      
```



```

ENDDO
ENDIF ! конец четырехузловой элемент
DO I=1,2
    DO J=1,2
        YAK(I,J)=0.
    ENDDO
ENDDO
C      матрица Якоби
DO I=1,2
    DO J=1,2
        DO K=1,KE
            YAK(I,J)=YAK(I,J)+HP(I,K)*XX(J,K)
        ENDDO
    ENDDO
ENDDO
    A11=YAK(1,1)
    A12=YAK(1,2)
    A21=YAK(2,1)
    A22=YAK(2,2)
    YYY=A11*A22-A12*A21 !      якобиан
IF(YYY.LE.0.) THEN
    WRITE(*,*) YYY, 'ЭЛЕМЕНТ ВЫРОЖДЕН!'
    STOP
ENDIF
C      обратная матрица Якоби
    A(1,1)=A22/YYY
    A(1,2)=-A21/YYY
    A(2,1)=-A12/YYY
    A(2,2)=A11/YYY
RETURN
END

C*****
C  П/П ПЕРЕМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ E=BT*D*B
C*****
SUBROUTINE MBTDB(B,D,E,KSE,KIS)
REAL*8 B(KIS,KSE),D(KIS,KIS),BB(4),E(KSE*(KSE+1)/2)

    DO I=1, KSE*(KSE+1)/2
        E(I)=0.
    ENDDO
    K=0
    DO J=1,KSE
        DO MM=1,KIS
            BB(MM)=0.
            DO L=1,KIS
                BB(MM)=BB(MM)+D(MM,L)*B(L,J)
            ENDDO
        ENDDO
    ENDDO

```

```

DO I=J,KSE
  STIFF=0.
  DO L=1,KIS
    STIFF=STIFF+B(L,I)*BB(L)
  ENDDO
  K=K+1
  E(K)=E(K)+STIFF
ENDDO
ENDDO
RETURN
END

```

3.3.4. В заключение главы приведем пример подпрограммы вычисления деформаций по точкам интегрирования криволинейного четырехугольника. Напомним, что деформации вычисляются с помощью соотношения (2.13) $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_i$.

```

C*****
C П/П ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ В ТОЧКАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ 4-Х УГОЛЬНОГО
C ЭЛ-ТА
C*****
SUBROUTINE STREIN(XX, PP, SN, KE, NINT, NN)
C*****
C ВХОДНЫЕ МАССИВЫ И ПАРАМЕТРЫ:
C XX(2,KE) – общие декартовы координаты узлов элемента
C PP(2*KE) - перемещения узлов элемента
C KE – число узлов в элементе (4 или 8)
C NINT – число точек интегрирования Гаусса по каждому направлению
C РАБОЧИЕ МАССИВЫ:
C V(3,2*KE) – матрица деформаций
C XG(2) – нормализованные координаты точек интегрирования
C ВЫХОДНОЙ МАССИВ;
C SN(KIS*NINT*NINT) – деформации в точках интегрирования NN элемента
C*****

REAL*8 PP(2*KE), SN(KIS*NINT*NINT)
REAL*8 XX(2,KE), X(2), H(KE), V(3,2*KE), XG(2), WGT(2)
DATA XG/-0.577350269, 0.577350269/ ! нормализованные координаты точек
! интегриров.

KSE=2*KE
NINT1=NINT
NINT2=NINT
IJ=0
DO LY=1, NINT2 ! начало цикла по точкам интегрирования вдоль оси Y
  X(2)=XG(LY)
  DO LX=1, NINT1 ! начало цикла по точкам интегрирования вдоль оси X
    X(1)=XG(LX)
    IJ=IJ+1
    CALL DEFOR4(V, X, XX, YYY, KE) ! См. п.3.3.3
  
```

```

DO I=1,KIS
  SN(KIS*(IJ-1)+I)=0.
  DO J=1,2*KE
    IF(PP(J).NE.0.)SN(KIS*(IJ-1)+I)=SN(KIS*(IJ-1)+I)+B(I,J)*PP(J)
  ENDDO
ENDDO
ENDDO ! конец цикла по LX
ENDDO ! конец цикла по LY
RETURN
END

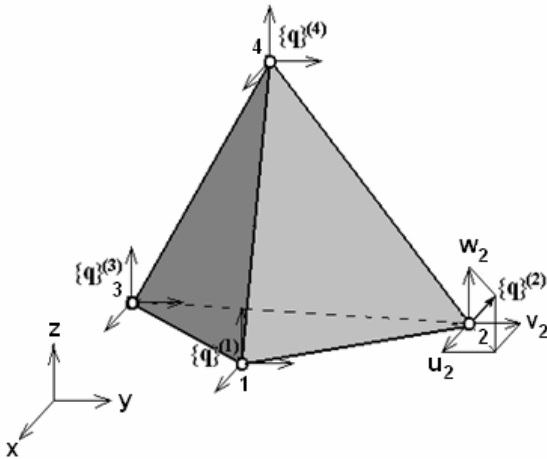
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидный Г.Р., Колчин С.Ф., Клованич С.Ф. Матричный метод решения задач строительной механики. – Кишинев: Штиинца, 1980. –308 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Клаф Р.У. Метод конечных элементов в решении плоской задачи теории упругости. – В кн.: Расчет строительных конструкций с применением электронных машин. – М.: Госстройиздат. 1967. –С. 142-171.
4. Клованич С.Ф. «Concord». Программный комплекс решения геотехнических задач методом конечных элементов. Руководство пользователя. – Одесса, 2003. – 63 с.
5. Фрейденталь Г. Математика в науке и вокруг нас. – М.: Мир, 1977. – 261 с.
6. Turner M.Y., Clough R.W., Martin H.C., Topp L. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures//J.Aeronaut. Sci.- 1956. –Sept.- v. 23. – P. 805 -824.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.I. The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 1: The Basis. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 306 pp.
8. Zienkiewicz O.C., Taylor R.I. The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 2: Solid Mechanics. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 689 pp.

4.1. Элемент в виде тетраэдра

4.1.1. В том случае, когда напряженно-деформированное состояние тела может быть описано только с помощью всех шести компонент напряжений и деформаций, а перемещения точек определяются всеми тремя составляющими на оси координат, для аппроксимации тела используются объемные конечные элементы. Самый простой из них - тетраэдр с четырьмя узлами в вершинах (рис.4.1) [6]. Отметим, что этот элемент является трехмерным аналогом плоского треугольного элемента первого порядка (п.3.1.6). Вектор-столбец узловых перемещений i -го элемента имеет вид



$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)} \{q\}_i^{(4)} \right\}, \quad (4.1)$$

где каждый из векторов представляется тремя проекциями $\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)}\} = \{u_k v_k w_k\}$. Аналогичную структуру имеет и вектор узловых сил

$$\{R\}_i = \left\{ \{R\}_i^{(1)} \{R\}_i^{(2)} \{R\}_i^{(3)} \{R\}_i^{(4)} \right\}, \quad (4.2)$$

где $\{R\}_i^{(k)} = \{R_1^{(k)} R_2^{(k)} R_3^{(k)}\}$.

Связь между векторами (4.1) и (4.2) $\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i$ осуществляется с помощью

матрицы жесткости $[K]_i$, которая имеет блочную структуру

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

а типовой блок определяется по формуле (2.24)

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} dV. \quad (4.4)$$

4.1.2. Для того чтобы построить матрицы для элемента, необходимо выразить перемещения точек внутри элемента через перемещения его узлов, т.е. установить зависимость (2.12). Матрица интерполяционных функций для тетраэдра будет иметь четыре блока по числу узлов

$$[C] = [[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)}], \quad (4.5)$$

каждый из которых равен $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, где E_3 - единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений u, v и w по области элемента примем в виде линейных функций координат, т.е.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z; \\ v(x, y, z) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z; \\ w(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Отметим, что функции (4.6) обеспечивают неразрывность перемещений на границе между элементами. Для определения 12-ти неизвестных коэффициентов имеются 12 условий по общему числу компонент узловых перемещений (4 узла по 3 перемещения в каждом). Например, $u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_4 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_{10} z_1$, и т.д. Так же, как в п.3.1.5, учитывая очевидные соотношения

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) + C_2(x, y, z) + C_3(x, y, z) + C_4(x, y, z) &= I; \\ C_1(x, y, z)x_1 + C_2(x, y, z)x_2 + C_3(x, y, z)x_3 + C_4(x, y, z)x_4 &= x; \\ C_1(x, y, z)y_1 + C_2(x, y, z)y_2 + C_3(x, y, z)y_3 + C_4(x, y, z)y_4 &= y; \\ C_1(x, y, z)z_1 + C_2(x, y, z)z_2 + C_3(x, y, z)z_3 + C_4(x, y, z)z_4 &= z, \end{aligned} \quad (4.7)$$

после аналогичных преобразований получим

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y, z) \\ C_2(x, y, z) \\ C_3(x, y, z) \\ C_4(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & I & I \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} I \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

Откуда найдем

$$C_1(x, y, z) = \frac{1}{6V_i}(a_1 + b_1x + c_1y + d_1z); \quad C_2(x, y, z) = \frac{1}{6V_i}(a_2 + b_2x + c_2y + d_2z);$$

$$C_3(x, y, z) = \frac{1}{6V_i}(a_3 + b_3x + c_3y + d_3z); \quad C_4(x, y, z) = \frac{1}{6V_i}(a_4 + b_4x + c_4y + d_4z), \quad (4.9)$$

где

$$a_1 = \det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \quad b_1 = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \quad c_1 = -\det \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}; \quad d_1 = -\det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

$$a \quad 6V_i = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \text{шесть объемов тетраэдра.}$$

Физический смысл выражений (4.9) заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение объема соответствующего заштрихованного тетраэдра с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента (рис. 4.2), т.е.

$$C_1(x, y, z) = \frac{V_{m234}}{V_i}, \quad C_2(x, y, z) = \frac{V_{m134}}{V_i}, \quad C_3(x, y, z) = \frac{V_{m124}}{V_i}, \quad C_4(x, y, z) = \frac{V_{m123}}{V_i}. \quad (4.10)$$

Функции, определенные соотношением (4.10), называют объемными L – координатами и являются нормализованными координатами для тетраэдра (см. п. 2.2.6, формула 3.23). Таким образом,

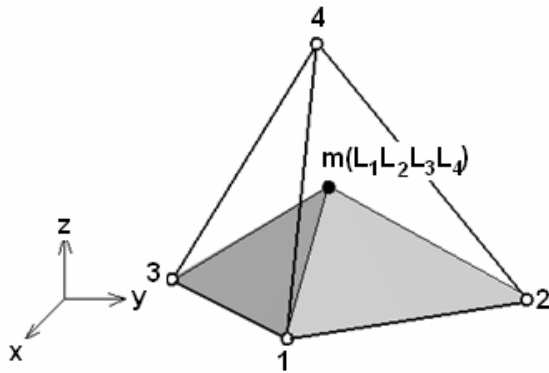


Рис.4.2. Нормализованные координаты для тетраэдра

$$L_1 = C_1(x, y, z); \quad L_2 = C_2(x, y, z);$$

$$L_3 = C_3(x, y, z); \quad L_4 = C_4(x, y, z). \quad (4.11)$$

Значения L - координат находятся в интервале 0-1, они удовлетворят требованиям, аналогичным (3.8)

$$L_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1 & , j = k; \\ 0 & , j \neq k. \end{cases} \quad (4.12)$$

При этом из четырех L -координат только три являются независимыми, поскольку они связаны между собой выражением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (4.13)$$

Далее L -координаты будут использоваться для интерполяции узловых перемещений в область тех конечных элементов, которые отображаются на тетраэдр.

4.1.3. Матрицу жесткости для тетраэдра можно получить с помощью процедур, описанных в главе 2.

Каждый из четырех блоков матрицы деформаций с помощью соотношений (1.2) и (1.4) запишем так

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z) = \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (4.14)$$

Матрицу, осуществляющую связь между напряжениями и деформациями при объемном напряженном состоянии, в отличие от (1.5), запишем в общем виде как для анизотропного материала $[D] = [D_{ij}]$ (причем $D_{ij} = D_{ji}$), где $i, j = 1, \dots, 6$. При этом будем исходить из предположения, что эта матрица постоянна в пределах элемента.

Подставив (4.14) и матрицу $[D]$ в выражение (4.4) и осуществив интегрирование, получим типовой блок матрицы жесткости элемента в виде тетраэдра. Т.к. все компоненты матрицы $[B]^{(k)}$ (4.14) являются независимыми от координат постоянными величинами, то интеграл в (4.4) заменяется выражением

$$[K]_{ij}^{(k)} = V_i ([B]^{(j)})^T [D] [B]^{(k)}.$$

Выполняя матричные перемножения, получим

$$[K]_{ij}^{(k)} = \frac{1}{36V_i^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

где

$$K_{11} = D_{11}b_k b_j + D_{44}c_k c_j + D_{66}d_k d_j + D_{14}(c_k b_j + b_k c_j) + D_{16}(d_k b_j + b_k d_j) + D_{46}(d_k c_j + c_k d_j);$$

$$K_{12} = D_{12}c_k b_j + D_{14}b_k b_j + D_{15}d_k b_j + D_{24}c_k c_j + D_{44}b_k c_j + D_{45}d_k c_j + D_{26}c_k d_j + D_{46}b_k d_j + D_{56}d_k d_j;$$

$$K_{13} = D_{13}d_k b_j + D_{15}c_k b_j + D_{16}b_k b_j + D_{43}d_k c_j + D_{45}c_k c_j + D_{46}b_k c_j + D_{36}d_k d_j + D_{56}c_k d_j + D_{66}b_k d_j;$$

$$\begin{aligned}
K_{21} &= D_{12}b_k c_j + D_{24}c_k c_j + D_{26}d_k c_j + D_{14}b_k b_j + D_{44}c_k b_j + D_{46}d_k b_j + D_{15}b_k d_j + \\
&\quad + D_{45}c_k d_j + D_{56}d_k d_j; \\
K_{22} &= D_{22}c_k c_j + D_{44}b_k b_j + D_{55}d_k d_j + D_{24}(b_k c_j + c_k b_j) + D_{25}(d_k c_j + c_k d_j) + \\
&\quad + D_{45}(d_k b_j + b_k d_j); \\
K_{23} &= D_{23}d_k c_j + D_{25}c_k c_j + D_{26}b_k c_j + D_{34}d_k b_j + D_{45}c_k b_j + D_{46}b_k b_j + D_{35}d_k d_j + \\
&\quad + D_{55}c_k d_j + D_{56}b_k d_j; \\
K_{31} &= D_{13}b_k d_j + D_{34}c_k d_j + D_{36}d_k d_j + D_{15}b_k c_j + D_{45}c_k c_j + D_{56}d_k c_j + D_{16}b_k b_j + \\
&\quad + D_{46}c_k b_j + D_{66}d_k b_j; \\
K_{32} &= D_{23}c_k d_j + D_{34}b_k d_j + D_{35}d_k d_j + D_{25}c_k c_j + D_{45}b_k c_j + D_{55}d_k c_j + D_{26}c_k b_j + \\
&\quad + D_{46}b_k b_j + D_{56}d_k b_j; \\
K_{33} &= D_{33}d_k d_j + D_{55}c_k c_j + D_{66}b_k b_j + D_{35}(c_k d_j + d_k c_j) + D_{36}(b_k d_j + d_k b_j) + \\
&\quad + D_{56}(b_k c_j + c_k b_j), \quad j, k = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

4.1.4. Распределенные объемные силы, вектор-столбец которых $\{G_V\} = \{X_V \ Y_V \ Z_V\}$, приводятся к эквивалентным узловым силам, вектор которых имеет блочную структуру $\{P_V\}_i = \{\{P_V\}_i^{(1)} \ \{P_V\}_i^{(2)} \ \{P_V\}_i^{(3)} \ \{P_V\}_i^{(4)}\}$, причем каждый блок содержит компоненты вдоль осей x, y, z и равен $\{P_V\}_i^{(k)} = \{P_{1V}^{(k)} \ P_{2V}^{(k)} \ P_{3V}^{(k)}\}$. Это приведение выполняется аналогично тому, как это делалось для плоского треугольного элемента по формуле

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \iiint_{V_i} C_k(x, y, z) \{G_V\} dx dy dz. \quad (4.16)$$

В том случае, когда объемные силы в пределах элемента постоянны

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \frac{V_i}{4} \{G_V\}, \quad (4.17)$$

т.е. узловые силы, статически эквивалентные объемным силам распределяются между узлами элемента пропорционально.

Если i -й элемент подвергается начальной деформации $\{\varepsilon_i\}$, постоянной в пределах элемента, то вектор-столбец узловых сил, эквивалентный этому воздействию, имеет типовой блок

$$\{P_t\}_i^{(k)} = V_i ([B]^{(k)})^T [D] \{\varepsilon_i\}. \quad (4.18)$$

4.2. Элемент в виде параллелепипеда

4.2.1. Разбиение объемного тела на тетраэдры приводит, как правило, к большому числу элементов. В некоторых случаях, если конфигурация тела проста и регулярна, его удастся представить набором параллелепипедов. Тогда число элементов уменьшается в шесть раз (рис.4.3) по сравнению с тетраэдральным разбиением.

Рассмотрим i -ый конечный элемент в виде параллелепипеда с восемью узловыми точками (рис.4.4) [6]. Вектор-столбец узловых перемещений этого элемента

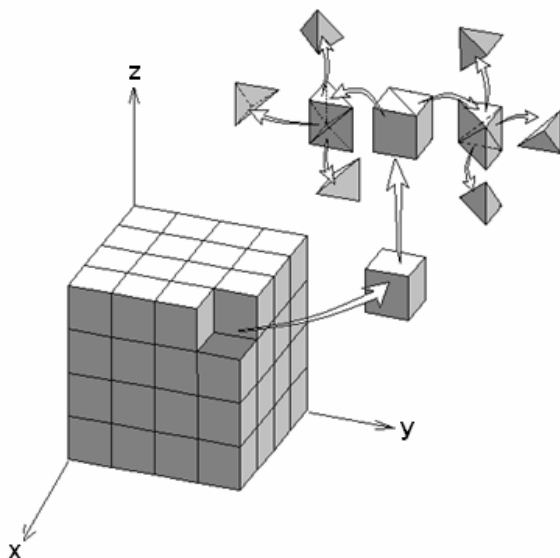


Рис.4.3. Разбиение на тетраэдры регулярной области

Рис.4.4. Конечный элемент-параллелепипед

имеет 24 компонента, объединенных в 8 блоков по числу узлов

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \dots \{q\}_i^{(k)} \dots \{q\}_i^{(8)} \right\}, \quad (4.19)$$

где каждый из векторов равен $\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)}\} = \{u_k v_k w_k\}$.

Аналогичную структуру имеет и вектор узловых сил

$$\{R\}_i = \left\{ \{R\}_i^{(1)} \dots \{R\}_i^{(k)} \dots \{R\}_i^{(8)} \right\}, \quad (4.20)$$

где $\{R\}_i^{(k)} = \{R_1^{(k)} R_2^{(k)} R_3^{(k)}\}$.

Связь между векторами (4.19) и (4.20) осуществляется с помощью матрицы жесткости, которая имеет блочную структуру

$$[K]_{\underline{i}} = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & \dots & [K]_{i1}^{(k)} & \dots & [K]_{i1}^{(8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{ij}^{(1)} & \dots & [K]_{ij}^{(k)} & \dots & [K]_{ij}^{(8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{i8}^{(1)} & \dots & [K]_{i8}^{(k)} & \dots & [K]_{i8}^{(8)} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

а типовой блок, как и прежде, определяется по формуле (4.4).

4.2.2. Матрица интерполяционных функций в данном случае будет иметь восемь блоков

$$[C] = [[C]^{(1)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(8)}], \quad (4.22)$$

каждый из которых равен $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, где E_3 - единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений u, v и w по области элемента примем в виде полиномов с суммарным числом постоянных коэффициентов, равным 24, т.е.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{16} yz + \alpha_{19} xz + \alpha_{22} xyz; \\ v(x, y, z) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z + \alpha_{14} xy + \alpha_{17} yz + \alpha_{20} xz + \alpha_{23} xyz; \\ w(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z + \alpha_{15} xy + \alpha_{18} yz + \alpha_{21} xz + \alpha_{24} xyz. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Функции (4.23) обеспечивают непрерывность перемещений при переходе от одного элемента к другому.

Конечно, можно проделать длинный ряд преобразований, подобно тому, как это было сделано в п.3.1.5 для треугольного элемента и получить интерполяционные функции $C_k(x, y, z)$, отвечающие зависимостям (4.23). Но обычно поступают следующим образом. Выражениям (4.23) отвечает соотношение (см.(3.20))

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y, z) \\ \vdots \\ C_k(x, y, z) \\ \vdots \\ C_8(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots & x_8 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k & \dots & y_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 y_1 z_1 & x_2 y_2 z_2 & \dots & x_k y_k z_k & \dots & x_8 y_8 z_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ \vdots \\ xyz \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

Соотношение (4.24) формулируют не в общей системе координат x, y, z , а в местной, трехмерной нормализованной, имеющей для параллелепипеда вид (рис. 4.5)

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}; \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}; \quad \zeta = \frac{z - z_c}{c}, \quad (4.25)$$

где x_c, y_c, z_c - координаты центра тяжести параллелепипеда. Подставляя в (4.24) нормализованные координаты узлов +1 или -1, будем иметь в новой системе координат

$$\begin{Bmatrix} C_1(\xi, \eta, \zeta) \\ \vdots \\ C_k(\xi, \eta, \zeta) \\ \vdots \\ C_8(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \pm 1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & \dots & \pm 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \dots & \pm 1 & \dots & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \vdots \\ \xi\eta\zeta \end{Bmatrix}. \quad (4.26)$$

В результате обращения средней матрицы и матричного перемножения получаются выражения для интерполяционных функций. Для произвольного k -го узла интерполяционная функция имеет вид

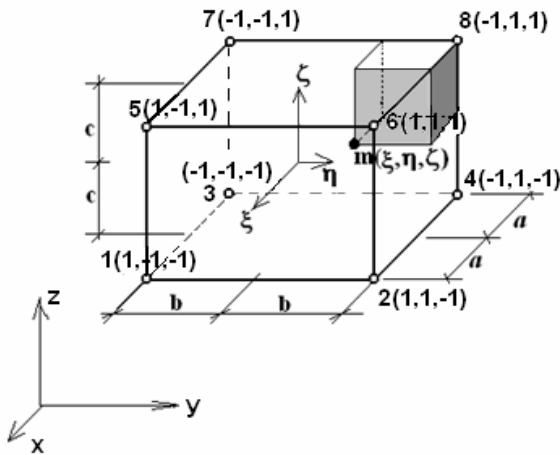


Рис.4.5. Нормализованные координаты

$$C_k(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta) \quad (4.27)$$

и представляет собой интерполяционный полином первого порядка как сирендипова, так и лагранжева семейства. Физический смысл выражений (4.27) заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение объема соответствующего заштрихованного параллелепипеда с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента (рис.4.5). Можно убедиться, что (4.27) представляет собой тройное произведение одномерных полиномов

первого порядка (П.66)

$$C_k(\xi, \eta, \zeta) = N^{(k)}(\xi)N^{(k)}(\eta)N^{(k)}(\zeta), \quad (4.28)$$

где, например, $N^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi)$.

4.2.3. Согласно выражению (2.15) матрица деформаций содержит восемь блоков

$$[B] = \left[[B]^{(1)} \dots [B]^{(k)} \dots [B]^{(8)} \right], \quad (4.29)$$

стандартный блок ее равен

$$[B]^{(k)} = [\Phi]C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta)(1 + \varsigma_k \varsigma) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi)(1 + \varsigma_k \varsigma) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varsigma_k}{c}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta) \\ \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi)(1 + \varsigma_k \varsigma) & \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta)(1 + \varsigma_k \varsigma) & 0 \\ 0 & \frac{\varsigma_k}{c}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta) & \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi)(1 + \varsigma_k \varsigma) \\ \frac{\varsigma_k}{c}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta) & 0 & \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta)(1 + \varsigma_k \varsigma) \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Следовательно, матрица жесткости элемента также блочная и имеет вид

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & \dots & [K]_{i1}^{(k)} & \dots & [K]_{i1}^{(8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{ij}^{(1)} & \dots & [K]_{ij}^{(k)} & \dots & [K]_{ij}^{(8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{i8}^{(1)} & \dots & [K]_{i8}^{(k)} & \dots & [K]_{i8}^{(8)} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

каждый из блоков которой может быть вычислен по формуле (4.4). Произведя замену переменных, и, имея в виду, что элементарный объем равен $dv = dx dy dz = abc d\xi d\eta d\varsigma$

$$[K]_{ij}^{(k)} = abc \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} d\xi d\eta d\varsigma. \quad (4.32)$$

Подматрица $[K]_{ij}^{(k)}$ - квадратная, третьего порядка

$$[K]_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

После взятия определенного интеграла, имея в виду постоянство матрицы $[D]$ по объему элемента, получим

$$\begin{aligned} K_{11} &= D_{11}\theta_{11} + D_{44}\theta_{22} + D_{66}\theta_{33} + D_{14}(\theta_{12} + \theta_{21}) + D_{16}(\theta_{13} + \theta_{31}) + D_{46}(\theta_{23} + \theta_{32}); \\ K_{12} &= D_{12}\theta_{12} + D_{24}\theta_{22} + D_{26}\theta_{32} + D_{14}\theta_{11} + D_{44}\theta_{21} + D_{46}\theta_{31} + D_{15}\theta_{13} + D_{45}\theta_{23} + D_{56}\theta_{33}; \\ K_{13} &= D_{13}\theta_{13} + D_{34}\theta_{23} + D_{36}\theta_{33} + D_{15}\theta_{12} + D_{45}\theta_{22} + D_{56}\theta_{32} + D_{16}\theta_{11} + D_{46}\theta_{21} + D_{66}\theta_{31}; \\ K_{21} &= D_{21}\theta_{21} + D_{14}\theta_{11} + D_{15}\theta_{31} + D_{24}\theta_{22} + D_{44}\theta_{12} + D_{45}\theta_{32} + D_{26}\theta_{23} + D_{46}\theta_{13} + D_{56}\theta_{33}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= D_{22}\theta_{22} + D_{44}\theta_{11} + D_{55}\theta_{33} + D_{24}(\theta_{12} + \theta_{21}) + D_{25}(\theta_{23} + \theta_{32}) + D_{45}(\theta_{13} + \theta_{31}); \\
K_{23} &= D_{23}\theta_{23} + D_{34}\theta_{13} + D_{35}\theta_{33} + D_{25}\theta_{22} + D_{45}\theta_{12} + D_{55}\theta_{32} + D_{26}\theta_{21} + D_{46}\theta_{11} + D_{56}\theta_{31}; \\
K_{31} &= D_{13}\theta_{31} + D_{15}\theta_{21} + D_{16}\theta_{11} + D_{34}\theta_{32} + D_{45}\theta_{22} + D_{46}\theta_{32} + D_{36}\theta_{33} + D_{56}\theta_{23} + D_{66}\theta_{13}; \\
K_{32} &= D_{23}\theta_{32} + D_{25}\theta_{22} + D_{26}\theta_{12} + D_{34}\theta_{31} + D_{45}\theta_{21} + D_{46}\theta_{11} + D_{35}\theta_{33} + D_{55}\theta_{23} + D_{65}\theta_{13}; \\
K_{33} &= D_{11}\theta_{11} + D_{44}\theta_{22} + D_{66}\theta_{33} + D_{14}(\theta_{21} + \theta_{12}) + D_{16}(\theta_{31} + \theta_{13}) + D_{46}(\theta_{32} + \theta_{23}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\theta_{11} &= \frac{bc}{96} \xi_j \xi_k (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \zeta_j \zeta_k); & \theta_{12} &= \frac{c}{48} \xi_k \eta_j (3 + \zeta_j \zeta_k); & \theta_{21} &= \frac{c}{48} \xi_j \eta_k (3 + \zeta_j \zeta_k); \\
\theta_{13} &= \frac{b}{48} \xi_k \zeta_j (3 + \eta_j \eta_k); & \theta_{22} &= \frac{ac}{96} \eta_j \eta_k (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \zeta_j \zeta_k); & \theta_{23} &= \frac{a}{48} \zeta_j \eta_k (3 + \xi_j \xi_k); \\
\theta_{33} &= \frac{ab}{96} \zeta_j \zeta_k (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \eta_j \eta_k).
\end{aligned}$$

Все остальные расчетные величины, относящиеся к параллелепипеду первого порядка (узловые усилия, матрица инерции и т.п.), получаются по стандартным формулам п. 3.1.

Дифференцирование выражений, входящих в формулу (4.23), по x , y и z дает линейные функции. Следовательно, согласно выражению (1.2), деформации по области элемента распределяются по линейному закону.

4.2.4. Объемные элементы в виде тетраэдра и параллелепипеда допускают, как и плоские первого порядка, параметрическое отображение. При этом из всех видов отображений, используется, в основном, одно - изопараметрическое, когда геометрия элемента описывается теми же интерполяционными функциями, что и перемещения

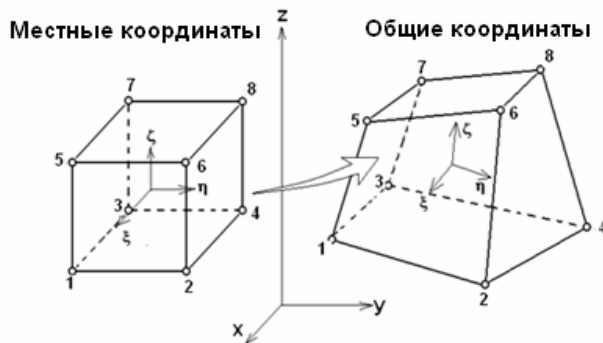


Рис.4.6. Отображение элемента первого порядка

внутри него. Суб- и суперпараметрические объемные элементы практически не используются. Поэтому далее рассматривать будем только изопараметрические конечные элементы. По аналогии с соотношением (3.71) координаты внутренних точек элемента запишем в виде интерполяционных выражений

$$\begin{aligned}
x &= C_1 x_1 + \dots + C_k x_k + \dots + C_n x_n; \\
y &= C_1 y_1 + \dots + C_k y_k + \dots + C_n y_n; \\
z &= C_1 z_1 + \dots + C_k z_k + \dots + C_n z_n,
\end{aligned} \quad (4.34)$$

где n – число узлов элемента; C_k - интерполяционные функции.

Напомним, что эти интерполяционные функции для элементов первого порядка в описанных ранее местных системах координат имеют вид:
для тетраэдра

$$C_k(L_k) = L_k; \quad (4.35)$$

для параллелепипеда

$$C_k(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta). \quad (4.36)$$

Описание геометрии изопараметрических элементов осуществляется отображением местной нормализованной системы координат в общие декартовы. Однако, грани элемента при этом, должны оставаться плоскими. Пример отображения координат для параллелепипеда первого порядка представлен на рис.4.6. Параллелепипед трансформируется в восьмиугольник общего вида.

4.3. Криволинейные объемные элементы

4.3.1. Чтобы повысить точность расчета необходимо увеличить число разбиений и уменьшить размеры элементов, что часто приводит к огромному числу разрешающих уравнений и сопровождается значительными вычислительными трудностями. Поэтому, на практике точность решения повышают не за счет увеличения числа элементов, а путем выбора в качестве интерполяционных функций полиномов второго, третьего и т.д. порядков. Порядок полиномов определяет и названия элементов – элементы второго, третьего и т.д. порядков. Такие элементы, в отличие от элементов первого порядка, обеспечивают неразрывность на границах со смежными элементами не только перемещений, но и деформаций. Разумеется, при этом возникает необходимость увеличить число степеней свободы элемента. Наиболее естественным путем для этого служит введение дополнительных узлов на ребрах. В результате количество узлов, например, для тетраэдра второго порядка увеличивается до 10, для параллелепипеда второго порядка – до 20. При этом число степеней свободы в первом случае станет равным 30, во втором – 60. Если для описания геометрии использовать те же интерполяционные функции, что и для перемещений, можно изопараметрически отобразить элементы с прямолинейными ребрами в аналогичные криволинейные. На рис.4.7 приведены результаты отображения для объемных элементов второго порядка. Геометрия элемента при этом описывается выражением (4.34).

Приведем без выводов интерполяционные полиномы сирендипова семейства для элементов второго и третьего порядков, которые в изопараметрических элементах используются как для интерполяции перемещений, так и для интерполяции координат [2].

4.3.2. Интерполяционные полиномы для тетраэдра второго порядка (рис.4.7а) выражаются через нормализованные L -координаты и имеют вид:
угловые узлы

$$C_k = (2L_k - 1)L_k, \quad k=1, \dots, 4 \quad (4.37)$$

узлы на ребрах

$$C_k = 4L_i L_j, \quad k=5, \dots, 10, \quad (4.38)$$

где ij – угловые узлы на ребре, на середине которого находится узел k .

Тетраэдр третьего порядка, интерполяционные функции для которого

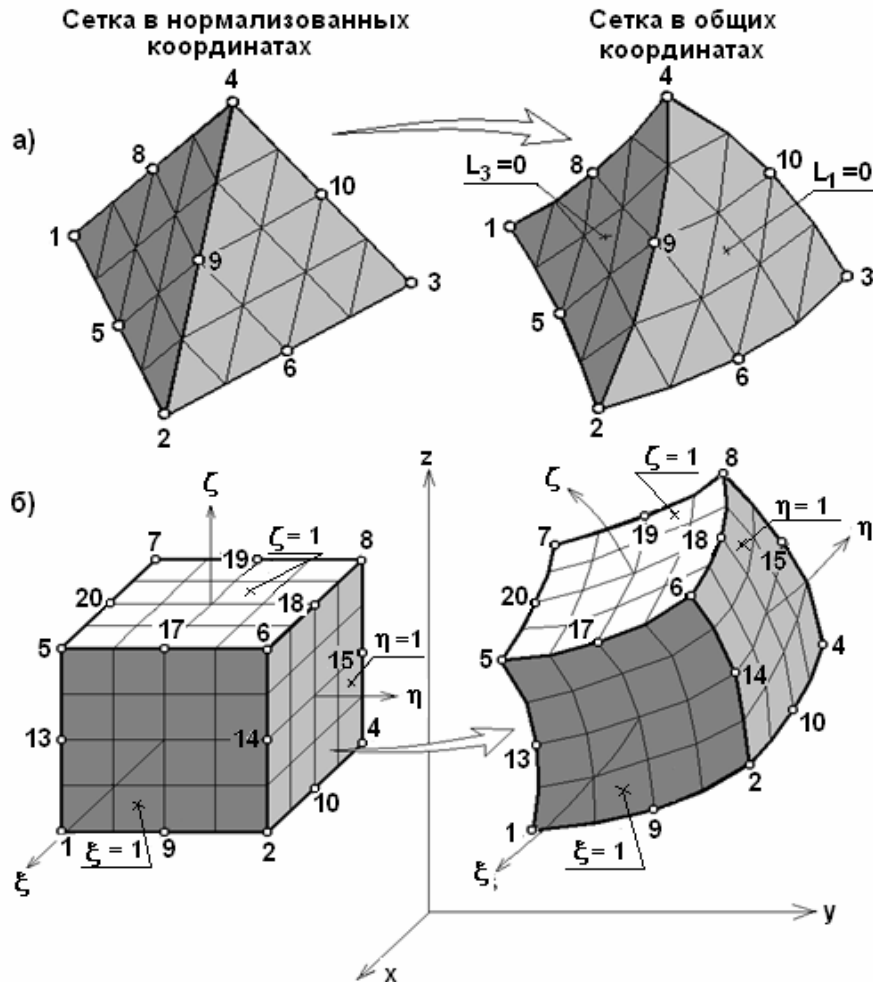


Рис.4.7. Отображение трехмерных координат

описываются полиномами третьей степени, имеют по два равноотстоящих дополнительных узла на каждом ребре, по одному узлу в центре тяжести каждой грани и, кроме того, в центре тяжести всего элемента. Последний узел является внутренним для данного элемента и не участвует в совместной работе с соседями, и, следовательно, не дает вклад в матрицу жесткости системы в целом. Использование данного элемента требует дополнительной процедуры исключения внутреннего узла. По этой причине он практически не используется и здесь не рассматривается.

4.3.3. Интерполяционные полиномы для 20-ти узлового восьмиугольника второго порядка (рис.4.7) выражаются через нормализованные координаты ξ, η, ς и имеют вид:
угловые узлы

$$C_k = \frac{1}{8}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(1 + \varsigma_k \varsigma)(\xi_k \xi + \eta_k \eta + \varsigma_k \varsigma - 2), \quad k=1, \dots, 8, \quad (4.39)$$

узлы на ребрах

$$C_k = \frac{1}{4} \left[(1 + \xi_k \xi - (1 - \xi_k^2) \xi^2) \left[(1 + \eta_k \eta - (1 - \eta_k^2) \eta^2) \left[(1 + \varsigma_k \varsigma - (1 - \varsigma_k^2) \varsigma^2) \right] \right] \right]. \quad (4.40)$$

Восьмиугольник третьего порядка (32 узла) имеет следующие интерполяционные полиномы:
угловые узлы

$$C_k = \frac{1}{64}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(1 + \varsigma_k \varsigma) \left[9(\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2) - 12 \right], \quad k=1, \dots, 8, \quad (4.41)$$

узлы на ребрах

$$C_k = \frac{9}{64} \bar{C}(\xi) \bar{C}(\eta) \bar{C}(\varsigma), \quad k=9, \dots, 32, \quad (4.42)$$

где $\bar{C}(\xi) = \frac{9}{8}(1 - \xi_k^2)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_k \xi) + \frac{1}{8}(9\xi_k^2 - 1)(1 + \xi_k \xi)$;

$\bar{C}(\eta)$ и $\bar{C}(\varsigma)$ получаются аналогично заменой ξ на η и ς соответственно.

4.3.4. Матрицы и вектора, характеризующие криволинейные объемные элементы, получаются по общим формулам (2.24), (2.27) и (2.33), содержащие объемные интегралы. Поскольку интерполяционные функции для этих элементов, а следовательно и матрицы деформаций $[B]$ (2.15), содержащие производные интерполяционных функций, формулируются в местных нормализованных координатах ξ, η, ς или L_1, L_2, L_3, L_4 , то необходимо перед интегрированием осуществить преобразование в общую систему x, y, z .

Преобразование координат ξ, η, ς осуществляется с помощью зависимостей [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_k}{\partial \xi} &= \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial C_k}{\partial \eta} &= \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial C_k}{\partial \varsigma} &= \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varsigma} + \frac{\partial C_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varsigma} + \frac{\partial C_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varsigma} \end{aligned} \quad (4.43)$$

или в матричной форме

$$\left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \right\} = [J] \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\}, \quad (4.44)$$

$$\text{где } \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \right\} = \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \quad \frac{\partial C_k}{\partial \eta} \quad \frac{\partial C_k}{\partial \zeta} \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\} = \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \quad \frac{\partial C_k}{\partial y} \quad \frac{\partial C_k}{\partial z} \right\},$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} - \text{матрица Якоби.}$$

Из (4.44) и получаются искомые соотношения в виде

$$\left\{ \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial C_k}{\partial \xi} \right\}. \quad (4.45)$$

Замена переменных под знаком определенного интеграла требует также выразить элементарные объемы в новой системе координат. Это делается с помощью следующей зависимости

$$dv = dx dy dz = \det|J| d\xi d\eta d\zeta, \quad (4.46)$$

где $\det|J|$ - определитель матрицы Якоби.

При преобразование L -координат необходимо учесть, что, согласно (4.13), независимыми являются только три из них. Поэтому, предварительно необходимо выразить одну, например L_4 , через остальные

$$L_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3. \quad (4.47)$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial C_k}{\partial L_1} = \frac{\partial C_k}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial L_1} + \frac{\partial C_k}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} + \frac{\partial C_k}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial L_1} + \frac{\partial C_k}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial L_1},$$

и, имея в виду очевидные равенства $\frac{\partial L_1}{\partial L_1} = 1$, $\frac{\partial L_4}{\partial L_1} = -1$, $\frac{\partial L_2}{\partial L_1} = \frac{\partial L_3}{\partial L_1} = 0$,

получим

$$\frac{\partial C_k}{\partial L_1} \rightarrow \frac{\partial C_k}{\partial L_1} - \frac{\partial C_k}{\partial L_4}. \quad (4.48)$$

Стрелка обозначает, что производная $\frac{\partial C_k}{\partial L_1}$ заменяется на $\frac{\partial C_k}{\partial L_1} - \frac{\partial C_k}{\partial L_4}$ во всех выражениях.
Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_k}{\partial L_2} &\rightarrow \frac{\partial C_k}{\partial L_2} - \frac{\partial C_k}{\partial L_4}, \\ \frac{\partial C_k}{\partial L_3} &\rightarrow \frac{\partial C_k}{\partial L_3} - \frac{\partial C_k}{\partial L_4}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

После исключения зависимой переменной можно выполнять преобразования, аналогичные преобразованиям с координатами ξ, η, ς . Для этого необходимо в формулах (4.43)-(4.46) формально заменить символ ξ на L_1 , η на L_2 , ς на L_3 .

4.3.5. Матрицу Якоби несложно получить, вычисляя производные по общим координатам, учитывая, что они связаны с местными координатами зависимостями (4.34), т.е.

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \varsigma} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \varsigma} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial \varsigma} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \xi} & \frac{\partial C_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial C_1}{\partial \eta} & \frac{\partial C_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial C_1}{\partial \varsigma} & \frac{\partial C_2}{\partial \varsigma} & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial \varsigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

где n – число узлов элемента.

Эта же формула справедлива и для L - координат, если предварительно выполнены преобразования (4.48) и (4.49). В ней просто тройку независимых переменных ξ, η, ς заменяют на L_1, L_2, L_3 .

4.3.6. После всех предварительных преобразований, связанных с заменой координат на нормализованные местные, определение матриц для элементов сводится к вычислению определенных интегралов вида:
для восьмиугольного элемента

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \varsigma) d\xi d\eta d\varsigma; \quad (4.51)$$

для тетраэдра

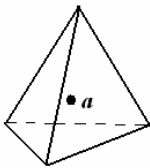
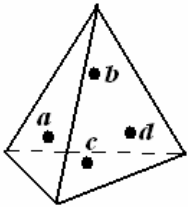
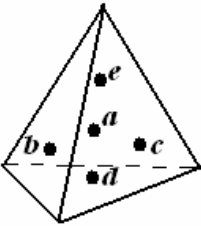
$$I = \int_0^{L_1} \int_0^{L_1-L_1} \int_0^{L_1-L_1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 dL_3. \quad (4.52)$$

Отметим, что якобианы здесь включены в качестве сомножителей в подинтегральную функцию f .

4.3.7. Совершенно очевидно, что процедура взятия определенного интеграл (4.51) или (4.52) в виде замкнутой квадратуры практически нереализуема. Поэтому, приходится прибегать к численному интегрированию. Формулы численного интегрирования:

Таблица 4.1.

Координаты и весовые коэффициенты квадратуры Хаммера для тетраэдра

Порядок элемента	Рисунок	Точки	Пространственные L-координаты	Весовые коэффициенты
Первый		a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1
Второй		a	$\alpha, \beta, \beta, \beta$	$\frac{1}{4}$
		b	$\beta, \alpha, \beta, \beta$	$\frac{1}{4}$
		c	$\beta, \beta, \alpha, \beta$	$\frac{1}{4}$
		d	$\beta, \beta, \beta, \alpha$	$\frac{1}{4}$
			$\alpha=0.58541020$ $\beta=0.13819660$	
Третий		a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$
		b	$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
		c	$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
		d	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
		e	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$

для восьмиугольного элемента

$$I \approx \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j H_m f(\xi_i \eta_j \zeta_m); \quad (4.53)$$

для тетраэдра

$$I \approx \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_{ijm} f(L_{1i} L_{2j} L_{3m}). \quad (4.54)$$

Здесь n – число точек интегрирования в направлении каждой независимой переменной, H_i, H_j, H_m – весовые коэффициенты одномерной квадратуры Гаусса, приведенные в табл.П.1, W_{ijm} – весовые коэффициенты квадратуры Хаммера [2], которые представлены в следующей табл.4.1.

4.3.7. Приведем пример подпрограммы, вычисляющей матрицу жесткости восьмиугольного объемного конечного элемента первого порядка, которая является составной частью пакета прикладных программ «Concord» [3].

```

C*****
C П/П ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ВОСЬМИУЗЛОВОГО
C ОБЪЕМНОГО ЭЛЕМЕНТА ПЕРВОГО ПОРЯДКА
C*****
SUBROUTINE STIF8(D,ESTIFM,XX,NE,KE,KIS,KSE,KNUP)
C*****
C ВХОДНЫЕ МАССИВЫ И ПАРАМЕТРЫ:
C XX(3,KE) – общие декартовы координаты узлов элемента
C KIS=6 –для случая объемной задачи
C KE=8 – число узлов в элементе
C KNUP=3 –степень свободы узла
C РАБОЧИЕ МАССИВЫ:
C D(KIS,KIS) –матрица связи между напряжениями и деформациями (п/п UPR)
C B(KIS,KNUP*KE) – матрица деформаций
C X(KNUP) –координаты текущей точки интегрирования
C XG(2) – нормализованные координаты точек интегрирования
C WGT(2)- весовые коэффициенты квадратуры Гаусса
C EST(KSE,KSE)- промежуточные значения матрицы жесткости
C ВЫХОДНОЙ МАССИВ:
C ESTIFM(KE*KNUP*(1+KE*KNUP)/2)–симметричная часть
C матрицы жесткости
C*****
REAL*8 B(KIS,KNUP*KE),D(KIS,KIS)
REAL*8 ESTIFM(KE*KNUP*(1+KE*KNUP)/2)
REAL*8 X(KNUP),XX(KE,KNUP), XG(2),WGT(2)

data XG/-0.577350269,0.577350269/
data WGT/1.,1./

```

4.4. Осесимметричные элементы

4.4.1. Напряженно-деформированное состояние тела вращения при осесимметричном нагружении полностью определяется (см. п.1.1.3) двумя компонентами перемещений u и w , зависящими от координат r и z (рис.4.8). Тем не менее, вектор-функции $\{\varepsilon\}$ и $\{\sigma\}$ содержат по четыре компонента, поскольку радиальное перемещение u вызывает в окружном направлении деформацию ε_θ и соответствующее напряжение σ_θ , которые все же от θ не зависят. Поэтому, при конечноэлементной аппроксимации осесимметричного тела вращения его разбивают на кольцевые элементы с треугольным или прямоугольным поперечными сечениями. При этом узлами элемента являются не точки, а кольца, образующиеся по длинам соответствующих окружностей.

Очевидно, что осесимметричная задача представляет собой частный случай пространственной. Однако удобно рассматривать ее как самостоятельную задачу, используя при выкладках несомненное сходство, с математической точки зрения, с плоской задачей.

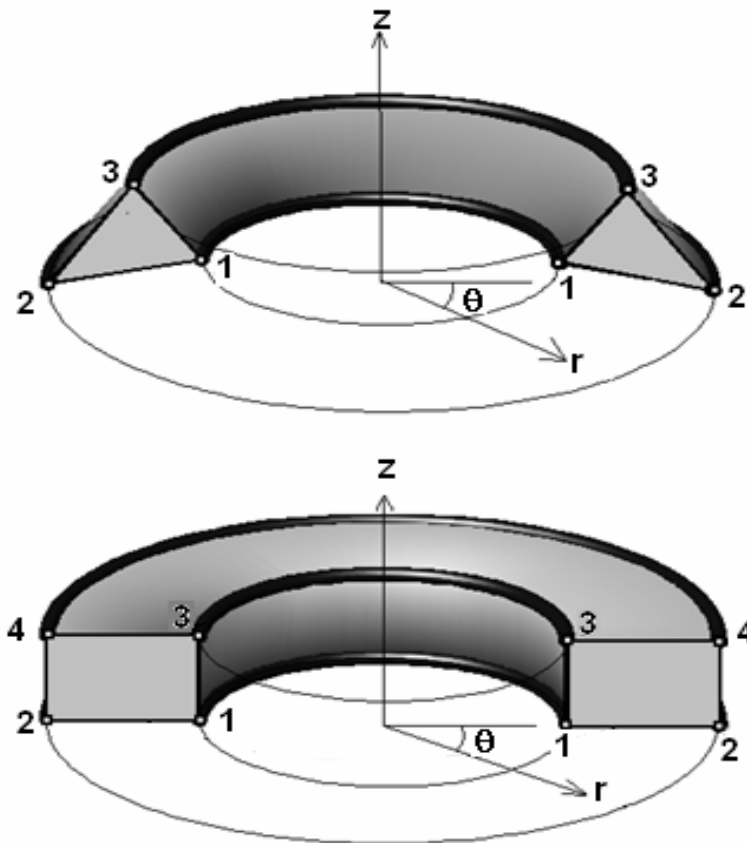


Рис. 4.8. Осесимметричные элементы

4.4.2. Обратимся вначале к кольцевому элементу с треугольным поперечным сечением (рис.4.9). Для определения его характеристик будем исходить из того, что вектор-функция перемещений внутренних точек определяется двумя компонентами

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(r,z) \\ w(r,z) \end{Bmatrix} = [C]\{q\}_i, \quad (4.55)$$

где $\{q\}_i = \{\{q\}^{(1)}\{q\}^{(2)}\{q\}^{(3)}\}$ - вектор перемещений узлов элемента, содержащий компоненты перемещений вдоль осей r и z , т.е. $\{q\}^{(k)} = \{u_k w_k\}$. Матрица $[C]$ установлена соотношениями (3.5) и (3.6), в которых координаты x и y следует заменить на r и z . Ясно, что при таком подходе непрерывность перемещений внутри элемента и при переходе от элемента к элементу обеспечивается автоматически.

Согласно (1.8) и (4.55) связь между деформациями и перемещениями в данном случае имеет вид

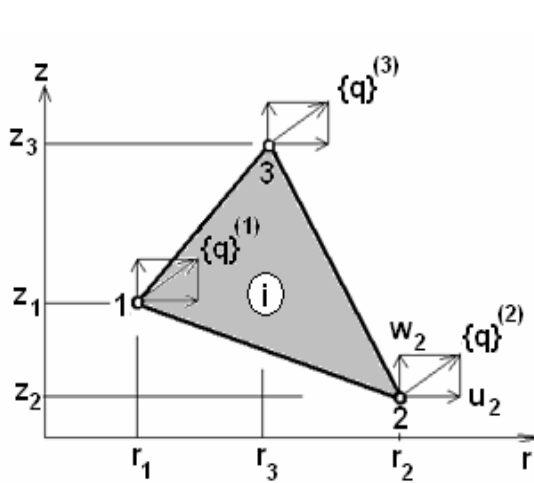


Рис.4.9. Осесимметричный треугольный элемент

$$\{\varepsilon\}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} [C]\{q\}_i = [B]\{q\}_i. \quad (4.56)$$

Принимая во внимание блочное строение матрицы $[C]$ (3.2), матрицу деформаций запишем также в блочном виде

$$[B] = [[B]^{(1)}[B]^{(2)}[B]^{(3)}], \quad (4.57)$$

где каждый из блоков равен

$$[B]^{(k)} = \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ \varphi_k(r,z) & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Здесь $\varphi_k(r,z) = \frac{a_k}{r} + b_k + \frac{c_k}{r}z$; a_k, b_k, c_k - определены в выражении (3.21).

Из (4.58) следует, что компоненты деформаций не остаются постоянными в пределах треугольного сечения, как это было в случае треугольного плоского элемента, а зависят от координат r и z . Следовательно, и компоненты напряжений также зависят от координат r и z .

Матрица жесткости рассматриваемого элемента получается с использованием стандартного соотношения (2.18) с типовым блоком (2.24), который, учитывая осевую симметрию, можно переписать в виде

$$[K]_{ij}^{(k)} = 2\pi \iint_{\Delta_i} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} r dr dz \quad (4.59)$$

и интегрирование осуществлять лишь в плоскости треугольного сечения. Однако, в этом случае оно не может быть выполнено также просто, как в соответствующей плоской задаче, т.к. подынтегральное выражение есть функция от r и z . Обычно, чтобы обойти эти трудности принимают приближенно величины r и z постоянными, равными значениям в центре тяжести элемента, т.е. $r_c = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$, $z_c = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$, а интеграл (4.59) заменяют приближенным выражением

$$[K]_{ij}^{(k)} \approx 2\pi r_c \Delta_i ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)}. \quad (4.60)$$

Произведя необходимые выкладки, можно получить в явном виде

$$[K]_{ij}^{(k)} = \frac{\pi r_c}{4\Delta_i} \begin{bmatrix} b_j(D_{11}b_k + D_{12}\varphi_k^c + D_{14}c_k) + & b_j(D_{13}c_k + D_{14}b_k) + \\ + \varphi_j^c(D_{12}b_k + D_{22}\varphi_k^c + D_{24}c_k) + & + \varphi_j^c(D_{23}c_k + D_{24}b_k) + \\ + c_j(D_{41}b_k + D_{42}\varphi_k^c + D_{44}c_k) & + c_j(D_{34}c_k + D_{44}b_k) \\ c_j(D_{13}b_k + D_{23}\varphi_k^c + D_{34}c_k) + & b_j(D_{34}c_k + D_{44}b_k) + \\ + b_j(D_{41}b_k + D_{24}\varphi_k^c + D_{44}c_k) & + c_j(D_{33}c_k + D_{34}b_k) \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

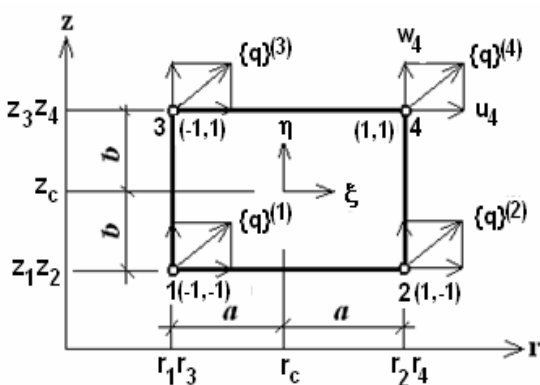


Рис.4.10. Осесимметричный прямоугольный элемент

где, например, $\varphi_k^c = \frac{a_k}{r_c} + b_k + \frac{c_k}{r_c} z_c$.

Такое приближенное интегрирование дает достаточную точность решения задачи в целом [2], поскольку разбиение на треугольники с узлами в вершинах должно быть достаточно мелким.

Вместе с тем, удовлетворительные результаты могут быть получены при использовании кольцевых элементов относительно больших размеров, если, конечно, повысить порядок интерполяционных функций, или, другими словами, применить элементы с дополнительными узлами, как это делается

для плоских элементов.

4.4.3. Определим теперь матрицы для кольцевого элемента прямоугольного сечения (рис.4.10). Вектор-функция узловых перемещений этого элемента $\{q\}_i = \{\{q\}^{(1)}\{q\}^{(2)}\{q\}^{(3)}\{q\}^{(4)}\}$ имеет четыре блока по числу узлов, каждый из которых содержит компоненты перемещений вдоль осей r и z $\{q\}^{(k)} = \{u_k w_k\}$. Типовой блок четырехблочной матрицы интерполяционных функций равен $[C]^{(k)} = E_2 C_k$, где E_2 - единичная матрица второго порядка. В нормализованных координатах, которые в данном случае связаны с глобальными следующими соотношениями

$$\xi = \frac{r-r_c}{a}; \quad \eta = \frac{z-z_c}{b}, \quad (4.62)$$

интерполяционная функция совпадает с (3.57) и равна

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta), \quad (k=1,2,3,4). \quad (4.63)$$

Тогда типовой блок матрицы деформаций, содержащей четыре подматрицы, согласно (1.8) и (2.15) примет вид

$$[B]^{(k)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta) & 0 \\ \frac{4C_k(\xi, \eta)}{r_c + a\xi} & 0 \\ 0 & \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi) \\ \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi) & \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta) \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Для построения матрицы жесткости воспользуемся соотношением (4.59), переписав его в нормализованных координатах

$$[K]_{ij}^{(k)} = 2\pi a b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)}(a\xi + r_c) d\xi d\eta. \quad (4.65)$$

Несмотря на то, что выражение (4.65) можно проинтегрировать точно [1], тем не менее, во избежание ошибок при преобразованиях, рекомендуем определять его численно.

4.4.4. Перейдем к определению узловых сил, статически эквивалентных реальным распределенным нагрузкам, имея в виду, что в данном случае они действуют равномерно по длинам окружностей, образующих узлы кольцевого элемента (рис.4.11).

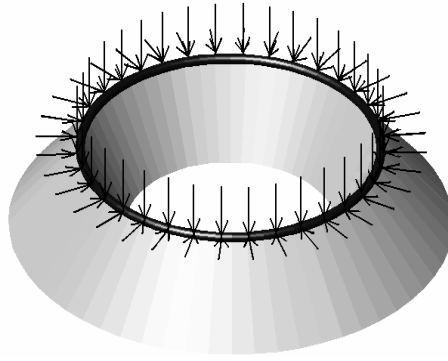


Рис.4.11. Узловые нагрузки

Вектор-столбец узловых сил $\{P_V\}_i$, соответствующих объемным силам интенсивностью $\{G_V(r, z)\} = \{R_V(r, z)Z_V(r, z)\}$, учитывая (2.27), определяется следующим образом

$$\{P_V\}_i = 2\pi \iint_{\Delta_i} [C]^T \{G_V\} r dr dz. \quad (4.66)$$

Причем, если используются конечные элементы с треугольным сечением первого порядка, а объемные силы в нем постоянны, то, например, в k -ом узле

$$\{P_V\}_i^{(k)} = 2\pi \{G_V\} \iint_{\Delta_i} C_k(r, z) r dr dz, \quad (4.67)$$

и в первом приближении, заменяя $C_k(r, z)$ ее значением в центре тяжести треугольника, получим

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \begin{Bmatrix} P_{1V}^{(k)} \\ P_{2V}^{(k)} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \pi \Delta_i r_c \begin{Bmatrix} R_V \\ Z_V \end{Bmatrix}. \quad (4.68)$$

Когда осесимметричное тело представляется совокупностью конечных элементов прямоугольного профиля с четырьмя узловыми точками и $\{G_V\} = const$, вектор сил в k -ом узле

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \begin{Bmatrix} P_{1V}^{(k)} \\ P_{2V}^{(k)} \end{Bmatrix} = 2\pi a b \begin{Bmatrix} R_V \\ Z_V \end{Bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C_k(\xi, \eta) (r_c + a\xi) d\xi d\eta = 2\pi a b \left(\frac{a}{3} + r_c\right) \begin{Bmatrix} R_V \\ Z_V \end{Bmatrix}. \quad (4.69)$$

Компоненты вектора объемных узловых сил для рассматриваемых далее элементов второго и выше порядков следует находить численно с использованием процедур численного интегрирования. К численной процедуре определения узловых сил удобно обращаться и при расчете тел вращения на распределенные центробежные силы

$$R_V = \omega^2 \rho r,$$

где ω - угловая скорость; ρ - плотность.

Для определения узловых сил $\{P_S\}_i$, соответствующих поверхностной нагрузке интенсивностью $\{p_S\} = \{p_r(r, z) p_z(r, z)\}$, воспользуемся зависимостью (2.29)

$$\{P_S\}_i = \iint_{S_i} [C]^T \{p_S\} dS = 2\pi \int_{l_i} [C]^T \{p_S\} r dl, \quad (4.70)$$

в которой интегрирование по поверхности элемента заменено интегрированием по длине образующей в пределах i -го элемента.

Вектор-столбец узловых сил, обусловленных начальной деформацией, записывается согласно (2.33) следующим образом

$$\{P_t\}_i = \iiint_{V_i} [B]^T [D] \{\varepsilon_t\} dV = 2\pi \iint_{\Delta_i} [B]^T [D] \{\varepsilon_t\} r dr dz. \quad (4.71)$$

4.4.5. Кольцевые элементы, описанные выше, по аналогии с плоской задачей, относятся к элементам первого порядка. Их использование позволяет, в большинстве

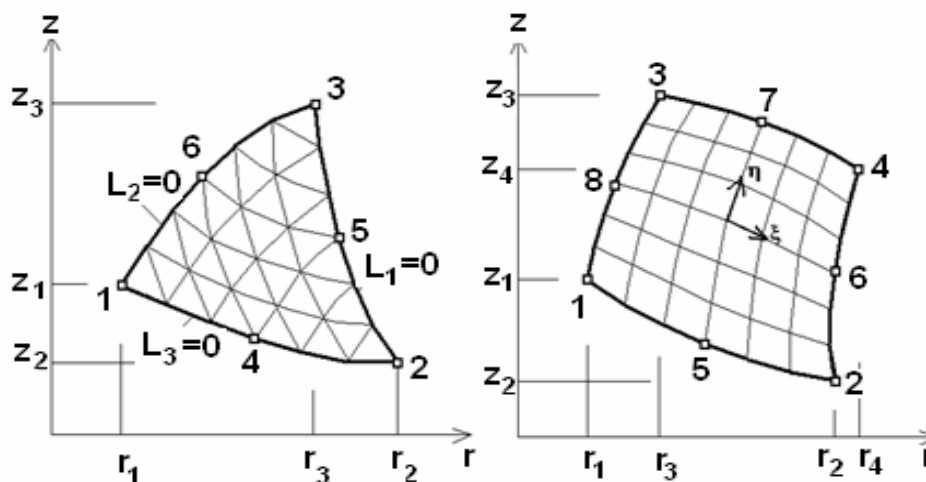


Рис.4.12. Криволинейные кольцевые элементы

случаев, получать на практике решение задачи с достаточной точностью. Тем не менее, иногда возникает необходимость повысить точность расчетов без увеличения числа элементов. Для этого используются элементы второго, третьего и т.д. порядков. Вводятся дополнительные узлы-кольца, т.е. увеличивается степень свободы элемента. Получение матриц для кольцевых элементов второго и более высоких порядков осуществляется аналогично тому, как это делалось в случае соответствующей плоской задачи.

Использование кольцевых конечных элементов с дополнительными узлами допускает в ряде случаев увеличение их размеров за счет повышения точности аппроксимации перемещений. При этом, естественно, может возникнуть необходимость в кольцевых элементах с криволинейными профилями (рис.4.12). Получение характеристик таких элементов, после внимательного прочтения раздела 3.3 не составит принципиальных трудностей. Отметим лишь, что местные нормализованные координаты отображаются на криволинейной сетке с помощью следующей зависимости

$$\begin{aligned} r &= C_1 r_1 + \dots + C_k r_k + \dots + C_n r_n; \\ z &= C_1 z_1 + \dots + C_k z_k + \dots + C_n z_n, \end{aligned} \quad (4.72)$$

где r_k, z_k - координаты узлов в общей цилиндрической системе; C_k - интерполяционные функции для k -го узла, записанные либо в координатах ξ, η для элементов четырехугольного сечения, либо - L_1, L_2, L_3 для элементов треугольного сечения.

Поскольку, матрицы для осесимметричных элементов, за исключением треугольника первого порядка, приходится устанавливать с помощью численного интегрирования, описанного в гл. 3, настоятельно рекомендуем всегда применять изопараметрическое отображение, т.е. такое, при котором интерполяция перемещений и координат по области элемента осуществляется с помощью одних и тех же интерполяционных функций. На трудоемкость и сложность численного интегрирования это не окажет никакого влияния.

Отметим, что использование изопараметрического отображения имеет смысл не только для элементов высших порядков. Так, например, прямоугольный элемент первого порядка отображается в четырехугольник общего вида, что существенно расширяет область его возможного использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидный Г.Р., Колчин С.Ф., Клованич С.Ф. Матричный метод решения задач строительной механики. – Кишинев: Штиинца, 1980. –308 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541с.
3. Клованич С.Ф. «Concord». Программный комплекс решения геотехнических задач методом конечных элементов. Руководство пользователя. – Одесса, 2003. – 63 с.
4. Gallagher R.H., Padlog J.,Bijlaard P.P. Stress Analysis of Heated Compex Shape// ARS J. – May, 1962. – v.32. - № 5. - P. 700-707.
5. Clough R.W., Rashid Y. Finite Element Analysis of Axi-Symmetric Solids// Proc. ASCE. J. Struct.Div. – Aug. – 1965. – v.91. -№ EM1,71.
6. Melosh R.,J. Structural Analysis in Solids//Proc. ASCE., J. Struct.Div. –Aug. – 1963. – v.89. -№ ST-4. – P.205-223.

ГЛАВА 5

ИЗГИБАЕМЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

5.1. Основные соотношения теории плит

5.1.1. Расчет плит и оболочек ведется, как известно, на базе прикладных технических теорий, позволяющих перейти от трехмерной задачи к двумерной, что существенно упрощает как математическую, так и чисто вычислительную процедуру. Реализация подобного подхода в МКЭ, когда исследуется поведение срединной плоскости плиты или поверхности оболочки обуславливает необходимость использования специфических конечных элементов. Для построения матриц, характеризующих эти элементы, применяются соответствующие технической теории изгиба.

5.1.2. Теория плит строится путем введения априорных гипотез о характере изменения напряженно-деформированного состояния по толщине [11]. Причем, имеется целый ряд таких гипотез, отличающихся характером и степенью обоснованности принимаемых допущений. Исторически первой и наиболее обоснованной теорией изгиба является теория тонких плит Кирхгофа-Лява. Имеются и ее многочисленные варианты, условно называемые теорией плит средней толщины, среди которых наибольшей популярностью пользуется теория Э.Рейсснера [10,11]. Приведем кратко основные положения этих теорий. Для этого рассмотрим фрагмент пластины постоянной толщины h , лежащей в плоскости xOz (рис.5.1), и вырежем из нее плоскостями, параллельными координатным осям, бесконечно малый элемент, по граням которого действуют напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$. Полагается, что толщина плиты меньше остальных ее размеров. В основу теории изгиба плит положена кинематическая гипотеза прямых нормалей: любая прямая, нормальная к срединной плоскости пластины до деформации остается после деформации прямой и не меняет своей длины. Согласно теории Кирхгофа-Лява нормаль к срединной плоскости остается нормалью и после деформации, теория же Э.Рейсснера допускает некоторое отклонение от нормали. Следствия этой гипотезы:

- напряжения $\sigma_z = 0$ (слои друг на друга не давят). В теории тонких плит Кирхгофа-Лява полагают также, что напряжения τ_{xz}, τ_{yz} малы по сравнению с напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и ими можно пренебречь, но только при определении перемещений, т.е. в этом случае $\tau_{xz} \approx \tau_{yz} \approx 0$;

- деформированное состояние плиты полностью определяется прогибом срединной плоскости w и углами поворота нормали к осям координат ν и ψ . В теории Кирхгофа-Лява, когда углы поворота являются функциями прогиба, т.е.

$$\nu = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (5.1)$$

напряженно-деформированное состояние определяется только одним параметром w .

Посредством этих гипотез трехмерная задача фактически сводится к двумерной, деформированное состояние плиты определяется деформированным состоянием ее срединной плоскости, перемещения которой характеризуются вектором $\{u_o(x, y)\} = \{w(x, y) \nu(x, y) \psi(x, y)\}$. Для тонкой плиты

$$\{u_o(x, y)\} = \left\{ I \quad -\frac{\partial}{\partial x} \quad -\frac{\partial}{\partial y} \right\} w(x, y).$$

Чтобы и напряженное состояние свести к двумерному, вместо напряжений вводятся интегральные силовые характеристики – погонные изгибающие и крутящие моменты, продольные и поперечные силы, которые статически эквивалентны действующим напряжениям и получаются путем суммирования по толщине пластины (рис.5.1).

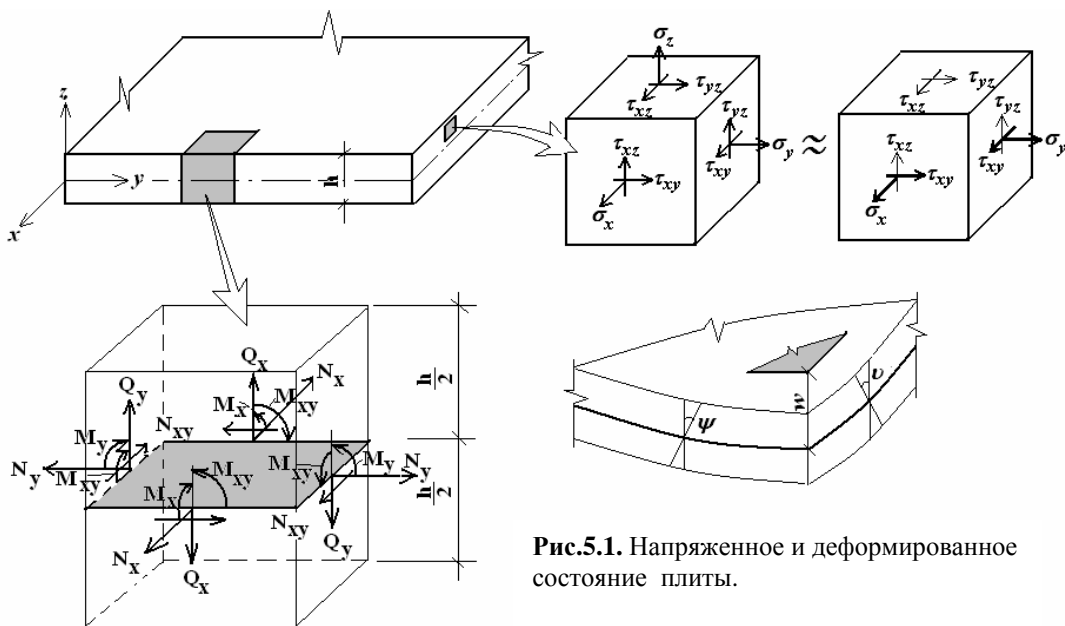


Рис.5.1. Напряженное и деформированное состояние плиты.

Погонные силы в плоскости плиты:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz; \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz; \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz. \quad (5.2)$$

Погонные изгибающие и крутящие моменты:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz. \quad (5.3)$$

Погонные поперечные силы

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz. \quad (5.4)$$

Поперечные силы (5.4), представленные вектором $\{Q\} = \{Q_x \ Q_y\}$, при определении прогибов и перемещений срединной поверхности в теории тонких плит считаются малыми по сравнению с остальными усилиями и ими пренебрегают.

Вектор напряжений заменяется вектором внутренних усилий

$$\{\sigma\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\} \{M_x \ M_y \ M_{xy}\} \{Q_x \ Q_y\} = \{N\} \{M\} \{Q\}, \quad (5.5)$$

где $\{N\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}$ - вектор усилий, действующих в срединной плоскости плиты; $\{M\} = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}$ - вектор моментов; $\{Q\} = \{Q_x \ Q_y\}$ - вектор поперечных сил.

5.1.3. Уравнения равновесия трехмерной теории (1.1) путем интегрирования по высоте заменяются их двумерными аналогами

$$[\Phi]^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{G_V\} dz; \quad (5.6)$$

$$[\Phi]^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\}_z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{G_V\}_z dz. \quad (5.7)$$

После интегрирования с учетом (5.3) - (5.5), принимая $\sigma_z = 0$, из (5.6) получим первую группу уравнений равновесия плиты

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

и уравнение

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q_z, \quad (5.9)$$

где q_x, q_y, q_z - распределенные погонные силы, действующие по поверхности плиты в направлениях x, y, z . Выражение (5.8) можно переписать в сокращенном матричном виде

$$[\Phi_{pl}]^T \{N\} = \{q_{pl}\}, \quad (5.10)$$

где $[\Phi_{pl}]$ - матрица-оператор, по форме совпадающая с матрицей-оператором для плоской задачи (1.10).

Из выражения (5.7) получается вторая группа уравнений равновесия

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.11)$$

или

$$[\Phi_{pl}]^T \{M\} + \{Q\} = 0. \quad (5.12)$$

Совместное решение (5.9) и (5.12) позволяет три уравнения равновесия при изгибе свести к одному, осуществляющему связь между изгибающими и крутящими моментами

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = q_z. \quad (5.13)$$

Таким образом, система уравнений равновесия плиты содержат два независимых уравнения, одно из которых (5.10) связана с усилиями, действующими в срединной плоскости, второе (5.13) – с поперечным изгибом. Можно сделать вывод, что задача расчета плит сводится к решению двух самостоятельных задач, одна из которых - плоское напряженное состояние, уже рассматривалась в главе 3, и можно непосредственно перейти ко второй задаче, а именно - к задаче поперечного изгиба. Анализируя уравнения равновесия при изгибе, видим, что поперечные силы $\{Q\}$ не являются независимыми, их можно выразить через погонные моменты с помощью соотношения (5.12).

5.1.4. Рассмотрим геометрические соотношения теории изгиба плит.

Вектор-столбец перемещений всех точек плиты в пространстве $\{u(x, y, z)\} = \{u(x, y, z) \ v(x, y, z) \ w(x, y, z)\}$ для плит средней толщины определяется, согласно второй гипотезе, тремя компонентами перемещений срединной плоскости – прогибом и двумя углами поворота, т.е. [11]

$$u(x, y, z) = -z v(x, y); \quad v(x, y, z) = -z \psi(x, y); \quad w(x, y, z) = w(x, y), \quad (5.14)$$

или

$$\{u(x, y, z)\} = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ v \\ \psi \end{Bmatrix} = [Z] \{u_o(x, y)\}. \quad (5.15)$$

Для тонких плит, учитывая (5.1), эти соотношения будут иметь вид

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}; \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}; \quad w(x, y, z) = w(x, y), \quad (5.16)$$

или

$$\{u(x, y, z)\} = [Z] \left\{ I \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T w(x, y). \quad (5.17)$$

Деформации в плоскостях, параллельных срединной плоскости, равны

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\Phi_{pl}] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = z [\Phi_{pl}] \begin{Bmatrix} v \\ \psi \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = z \{\chi\}, \quad (5.18)$$

где $[\Phi_{pl}]$ - матрица оператор для плоской задачи, определяемая соотношением (1.10).

Вектор кривизн равен

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = [\Phi_{pl}] \begin{Bmatrix} \nu \\ \psi \end{Bmatrix} = [\Phi_{pl}] [T] \begin{Bmatrix} w \\ \nu \\ \psi \end{Bmatrix} = [\Phi_{pl}] [T] \{u_o\}, \quad (5.19)$$

где $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Сдвиговые деформации

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \nu \\ \psi \end{Bmatrix} = [\Phi_s] \{u_o\}. \quad (5.20)$$

Отметим, что для тонкой плиты, учитывая (5.1), $\{\gamma\} = 0$, а

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = [\Phi_{pl}] \begin{Bmatrix} \nu \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} w. \quad (5.21)$$

5.1.5. Рассмотрим физические соотношения теории плит. Для изгибных составляющих усилий, согласно (5.3), имеем

$$\{M\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [D_{pl}] \{\varepsilon\} z dz = \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [D_{pl}] z^2 dz \right) \{\chi\} = [D_c] \{\chi\}, \quad (5.22)$$

где $[D_c]$ - так называемая цилиндрическая жесткость плиты, равная

$$[D_c] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [D_{pl}] z^2 dz. \quad (5.23)$$

Отметим, что для линейно упругого, изотропного материала, когда его характеристики не меняются по высоте и $[D_{pl}]$ можно вынести за знак интеграла, из (5.19) получим стандартное выражение

$$[D_c] = \frac{h^3}{12} [D_{pl}]. \quad (5.24)$$

Для нелинейного материала, когда его характеристики меняются по высоте в зависимости от напряженно-деформированного состояния в данной точке, матрица $[D_{pl}]$ также переменна по высоте и для получения матрицы $[D_c]$ необходимо выполнить интегрирование. В явном виде это интегрирование удастся выполнить редко, поэтому, как правило, применяют численное интегрирование. Для удобства применяется равномерное распределение точек интегрирования по высоте и в этом направлении используют квадратурные формулы Симпсона, трапеций или прямоугольников (см. П.5.3).

Для сдвиговых составляющих из (5.4) имеем

$$\{Q\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} k_s G & 0 \\ 0 & k_s G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dz \approx k_s G h \{\gamma\}. \quad (5.25)$$

где G – модуль сдвига материала, k_s – понижающий коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте, в работе [9] рекомендуется принимать его равным 5/6.

5.2. Конечные элементы для плит средней толщины

5.2.1. Наиболее распространенный способ аппроксимации плит – представление их срединной поверхности набором плоских треугольных элементов, взаимодействующих между собой в узлах, расположенных в вершинах. Рассмотрим такой элемент (рис.5.2). В качестве узловых параметров примем прогибы и углы поворота нормалей соответственно вокруг осей x и y . В каждом k -ом узле вектор столбец перемещений содержит три составляющих и имеет вид $\{q\}_i^{(k)} = \{w_k \ v_k \ \psi_k\}$. В целом для элемента вектор узловых перемещений определяется числом узлов и равен

$$\{q\}_i = \{ \{q\}_i^{(1)} \ \{q\}_i^{(2)} \ \{q\}_i^{(3)} \}. \quad (5.26)$$

Если потребовать неразрывность прогибов и углов поворота нормалей при переходе от элемента к элементу, то, рассуждая так же, как и в случае плоской задачи, законы изменения прогибов и углов поворота срединной плоскости в пределах элемента, характеризуемые вектором $\{u_o\} = \{w(x, y) \ v(x, y) \ \psi(x, y)\}$, можно принять в виде

$$w = \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_6 y; \quad v = \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_7 y; \quad \psi = \alpha_3 + \alpha_5 x + \alpha_8 y, \quad (5.27)$$

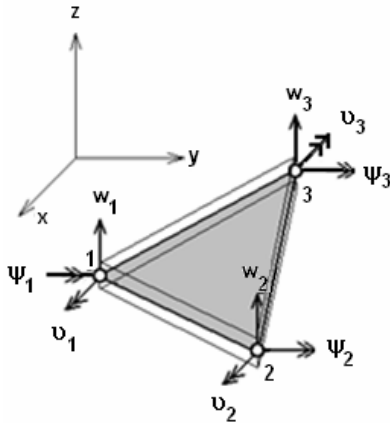


Рис.5.2. Треугольный элемент плиты.

и все выкладки, связанные с построением расчетных матриц, осуществить по стандартной схеме.

Так соотношение (3.3) в данном случае будет иметь вид

$$\{u_o\} = [C]\{q\}_i. \quad (5.28)$$

Матрицу интерполяционных функций $[C] = [[C]^{(1)}][C]^{(2)}[C]^{(3)}$ можно представить, используя L -координаты. Тогда ее типовой блок будет равен

$$[C]^{(k)} = E_3 C_k = E_3 L_k. \quad (5.29)$$

Интерполяцию перемещений и углов поворота можно осуществить также, используя полиномы более высокого порядка от L -координат. Например, полином $C_k = L_k + L_k^2 L_j + L_k^2 L_n - L_k L_j^2 - L_k L_n^2$ ($k=1,2,3; j=2,3,1; n=3,1,2$), удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к интерполяционным функциям.

Деформации изгиба по области элемента равны (5.19)

$$\{\chi\} = [\Phi_{pl}][T]\{u_o\} = [\Phi_{pl}][T][C]\{q\}_i = [B_c]\{q\}_i, \quad (5.30)$$

где матрица деформаций имеет блочную структуру $[B_c] = [[B_c]^{(1)}][B_c]^{(2)}[B_c]^{(3)}$, ее типовой блок равен

$$[B_c]^{(k)} = [\Phi_{pl}][T]C_k = \frac{1}{2\Delta_i} \begin{bmatrix} 0 & b_k & 0 \\ 0 & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Здесь b_k и c_k определены в выражении (3.21).

Деформации сдвига по области элемента равны (5.20)

$$\{\gamma\} = [\Phi_s]\{u_o\} = [\Phi_s][C]\{q\}_i = [B_s]\{q\}_i. \quad (5.32)$$

Матрица деформаций $[B_s]$ имеет три блока, каждый из которых равен

$$[B_s]^{(k)} = [\Phi_s] C_k = \frac{1}{2\Delta_i} \begin{bmatrix} b_k & 2\Delta_i L_k & 0 \\ c_k & 0 & 2\Delta_i L_k \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Матрица жесткости элемента также блочная

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

с типовым блоком

$$[K]_{ij}^{(\kappa)} = [K_c]_{ij}^{(\kappa)} + [K_s]_{ij}^{(\kappa)}. \quad (5.35)$$

Первое слагаемое (5.35), обусловленное изгибом, определяется с помощью соотношения, аналогичного (2.24)

$$[K_c]_{ij}^{(\kappa)} = \iint_{4_i} ([B_c]^{(j)})^T [D_c] [B_c]^{(\kappa)} dx dy = \Delta_i ([B_c]^{(j)})^T [D_c] [B_c]^{(\kappa)}. \quad (5.36)$$

После выполнения матричных перемножений получим

$$[K_c]_{ij}^{(\kappa)} = \frac{1}{4\Delta_i} \begin{bmatrix} k_{c11} & k_{c12} & k_{c13} \\ k_{c21} & k_{c22} & k_{c23} \\ k_{c31} & k_{c32} & k_{c33} \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

где

$$\begin{aligned} k_{c11} &= k_{c12} = k_{c13} = k_{c21} = k_{c31} = 0; \\ k_{c22} &= D_{11} b_j b_k + D_{33} c_j c_k + D_{13} (b_j c_k + b_k c_j); \\ k_{c23} &= (D_{12} b_j + D_{23} c_j) c_k + (D_{13} b_j + D_{33} c_j) b_k; \\ k_{c32} &= (D_{12} c_j + D_{13} b_j) b_k + (D_{23} c_j + D_{33} b_j) c_k; \\ k_{c33} &= D_{22} c_j c_k + D_{33} b_j b_k + D_{23} (b_j c_k + b_k c_j). \end{aligned}$$

Здесь D_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) – компоненты цилиндрической матрицы (5.23).

Второе слагаемое (5.35), обусловленное сдвигом, также определяется с помощью соотношения, совпадающего по форме с (2.24)

$$[K_s]_{ij}^{(\kappa)} = \iint_{4_i} ([B_s]^{(j)})^T [D_s] [B_s]^{(\kappa)} dx dy. \quad (5.38)$$

Выполняя необходимые действия, получим

$$[K_s]_{ij}^{(k)} = \frac{k_s G h}{2} \begin{bmatrix} b_j b_k + c_j c_k & \frac{b_j}{2} & \frac{c_j}{2} \\ \frac{b_k}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{c_k}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

5.2.2. Перейдем к обсуждению конечного элемента прямоугольной формы с четырьмя узлами, показанного на рис.5.3. Элемент имеет 12 степеней свободы, характеризуемой вектором узловых перемещений

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)} \{q\}_i^{(4)} \right\}, \quad (5.39)$$

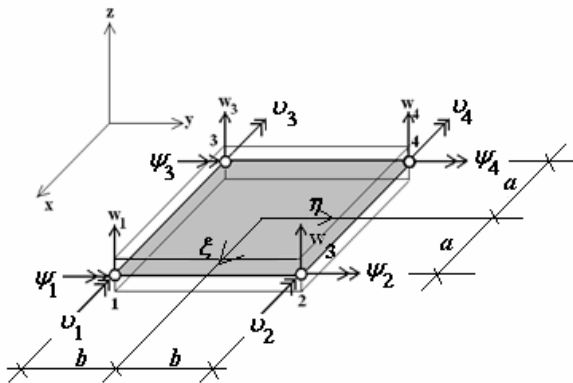


Рис.5.3. Прямоугольный элемент плиты

где, по прежнему, $\{q\}_i^{(k)} = \{w_k \vartheta_k \psi_k\}$. Условия неразрывности на границах элементов автоматически выполняются, если принять распределение прогибов и углов поворота нормалей по области элемента в виде функций

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} xy; \\ v(x, y) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} xy; \\ \psi(x, y) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} xy. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Разумеется, что для перехода от перемещений в форме (5.40) к матрице интерполяционных функций можно воспользоваться способом, аналогичным предложенным в п.3.1.4 (соотношение (3.17)). Однако проще воспользоваться местной нормализованной системой координат $\xi = \frac{x - x_c}{a}$, $\eta = \frac{y - y_c}{b}$ и записать с использованием полиномов лагранжева семейства непосредственно

$$[C] = [E_3 C_1(\xi, \eta) \ E_3 C_2(\xi, \eta) \ E_3 C_3(\xi, \eta) \ E_3 C_4(\xi, \eta)],$$

где E_3 - единичная матрица первого порядка.

При этом, согласно (3.57)

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta), \quad (k=1,2,3,4). \quad (5.41)$$

Матрицы элемента строятся так же, как это делалось выше.

Так, матрица изгибных деформаций будет иметь вид

$$[B_c]^{(k)} = [\Phi_{pl}]^T C_k = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi) \\ 0 & \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi) & \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta) \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Матрица сдвиговых деформаций равна

$$[B_s]^{(k)} = [\Phi_s] C_k = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{a}(1 + \eta_k \eta) & 4C_k & 0 \\ \frac{\eta_k}{b}(1 + \xi_k \xi) & 0 & 4C_k \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Типовой блок матрицы жесткости, как и ранее, представляется суммой

$$[K]_{ij}^{(\kappa)} = [K_c]_{ij}^{(\kappa)} + [K_s]_{ij}^{(\kappa)}. \quad (5.44)$$

Где первое слагаемое (5.44), обусловленное изгибом, определяется с помощью соотношения

$$[K_c]_{ij}^{(\kappa)} = \iint_{\Delta_i} ([B_c]^{(j)})^T [D_c] [B_c]^{(\kappa)} dx dy, \quad (5.45)$$

второе, обусловленное сдвигом, равно

$$[K_s]_{ij}^{(\kappa)} = \iint_{\Delta_i} ([B_s]^{(j)})^T [D_s] [B_s]^{(\kappa)} dx dy. \quad (5.46)$$

После выполнения матричных перемножений получим

$$[K_c]_{ij}^{(\kappa)} = \frac{ab}{16} \begin{bmatrix} k_{c11} & k_{c12} & k_{c13} \\ k_{c21} & k_{c22} & k_{c23} \\ k_{c31} & k_{c32} & k_{c33} \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

где

$$k_{c11} = k_{c12} = k_{c13} = k_{c21} = k_{c31} = 0;$$

$$k_{c22} = \frac{2D_{11}\xi_j\xi_k}{a^2} \left(1 + \frac{1}{3}\eta_j\eta_k\right) + \frac{2D_{33}\eta_j\eta_k}{b^2} \left(1 + \frac{1}{3}\xi_j\xi_k\right) + \frac{4D_{13}}{ab} (\xi_j\eta_k + \xi_k\eta_j);$$

$$k_{c23} = \frac{4D_{12}\xi_j\eta_k}{ab} + \frac{2D_{13}\xi_j\xi_k}{a^2} \left(1 + \frac{1}{3}\eta_j\eta_k\right) + \frac{2D_{23}\eta_j\eta_k}{b^2} \left(1 + \frac{1}{3}\xi_j\xi_k\right) + \frac{4D_{33}}{ab} \xi_k\eta_j;$$

$$k_{c32} = \frac{4D_{12}\xi_k\eta_j}{ab} + \frac{2D_{13}\xi_j\xi_k}{a^2} \left(1 + \frac{1}{3}\eta_j\eta_k\right) + \frac{2D_{23}\eta_j\eta_k}{b^2} \left(1 + \frac{1}{3}\xi_j\xi_k\right) + \frac{4D_{33}}{ab} \xi_j\eta_k;$$

$$k_{c33} = \frac{2D_{22}\eta_j\eta_k}{b^2} \left(1 + \frac{1}{3}\xi_j\xi_k\right) + \frac{2D_{33}\xi_j\xi_k}{a^2} \left(1 + \frac{1}{3}\eta_j\eta_k\right) + \frac{4D_{23}}{ab} (\xi_j\eta_k + \xi_k\eta_j).$$

Здесь D_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) – компоненты цилиндрической матрицы (5.23).

$$[K_s]_{ij}^{(k)} = \frac{k_s G h a b}{16} \begin{bmatrix} k_{s11} & k_{s12} & k_{s13} \\ k_{s21} & k_{s22} & k_{s23} \\ k_{s31} & k_{s32} & k_{s33} \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

где

$$\begin{aligned} k_{s11} &= 2 \frac{\xi_j\xi_k}{a^2} \left(1 + \frac{1}{3}\xi_j\xi_k\right); & k_{s12} &= \frac{4\xi_j}{a} \left(1 + \frac{1}{3}\eta_j\eta_k\right); & k_{s13} &= \frac{4\eta_j}{b} \left(1 + \frac{1}{3}\xi_j\xi_k\right); \\ k_{s21} &= \frac{4\xi_k}{a} \left(1 + \frac{1}{3}\eta_j\eta_k\right); & k_{s22} &= k_{s33} = 4 \left(1 + \frac{1}{3}\xi_j\xi_k\right) \left(1 + \frac{1}{3}\eta_j\eta_k\right); \\ k_{s31} &= \frac{4\eta_k}{b} \left(1 + \frac{1}{3}\xi_j\xi_k\right); & k_{s23} &= k_{s32} = 0. \end{aligned}$$

5.2.3. Рассмотрим приведение поверхностных нагрузок к узловым. Если в пределах элемента действует поперечная поверхностная нагрузка интенсивностью q , то в k -ом узле элемента сосредоточенная вертикальная сила будет равна

$$P_z^{(k)} = \iint_{\Delta_i} C_k q \, dx dy. \quad (5.49)$$

Интегрирование для треугольного элемента дает $P_z^{(k)} = \frac{1}{3} q \Delta_i$, для прямоугольного -

$$P_z^{(k)} = \frac{1}{4} q \Delta_i.$$

5.2.4. После определения вектора узловых перемещений, полученных в результате решения задачи, необходимо найти усилия в элементах. Это можно сделать, используя зависимости (5.21) и (5.25)

$$\{M\} = [D_c] \{\chi\} = [D_c] [B_c] \{q\}_i; \quad \{Q\} = k_s G h \{\gamma\} = k_s G h [B_s] \{q\}_i. \quad (5.50)$$

5.3. Конечные элементы тонких плит

5.3.1. Как уже отмечалось, в случае тонких плит углы поворота нормалей становятся функциями прогибов и определяются как производные (5.1)

$$\nu = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.51)$$

Деформации сдвига, определяемые соотношением (5.20), в этом случае становятся равными нулю. Казалась бы, нет ничего проще, построить соотношения для треугольных и прямоугольных элементов тонкой плиты, приняв в соотношениях (5.35) и (5.44) второе слагаемое $[K_s]_{jj}^{(K)} = 0$. Однако, анализирую оставшееся слагаемое, приходим к выводу, что оно представляет собой вырожденную матрицу, содержащую нули на главных диагоналях. Кроме того, дифференцируя функцию прогибов w (5.27) и (5.40), получим постоянные значения (для треугольника) или линейные функции (для прямоугольника) распределения углов поворота нормалей по области элемента. Это явно не укладывается в представления о характере деформирования срединной плоскости, приводит к разрывам или изломам функций углов поворота в местах стыковки со смежными элементами. Сплошность же дискретной модели плиты, представленной набором конечных элементов, обеспечивается лишь тогда, когда на границах обеспечивается непрерывность не только функции прогибов $w(x, y)$, но и углов поворота нормалей, являющихся производными от этой функции. Это означает, во-первых, что для описания деформированного состояния элемента достаточно задать лишь функцию $w(x, y)$, во-вторых, выражение для этой функции должно быть таким, чтобы ее первые производные также были непрерывны на границах элементов, т.е. функция должна быть гладкой. Очевидно, что рассматриваемые ранее линейные функции для этих целей не подходят, т.к., помимо всего, приводят к нулевым значениям изгибающих моментов, определяемых с помощью вторых производных от прогибов.

5.3.2. Выбор гладких функций для $w(x, y)$ связан обычно с определенными трудностями, что хорошо иллюстрируется заимствованном в [1] примере.

Рассмотрим прямоугольный элемент плиты, изображенный на рис.5.3, срединная плоскость которого совмещена с плоскостью xOy декартовой системы координат. Допустим, что в каждой узловой точке элемента основными неизвестными являются три отмеченных выше обобщенных перемещения. Зададим для $w(x, y)$ закон в виде полинома p -ой степени

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \dots \quad (5.52)$$

Нетрудно убедиться в том, что вдоль любой стороны этот полином, а также первые производные от него становятся функциями одной переменной. Например, для

стороны *I-2*, направленной вдоль оси *x*, где $y=const$, после приведения подобных членов получим

$$\begin{aligned} w(x) &= A_1 + A_2x + A_3x^2 + \dots; \\ \frac{\partial w(x)}{\partial x} &= A_2 + 2A_3x + \dots; \\ \frac{\partial w(x)}{\partial y} &= B_1 + B_2x + B_3x^2 + \dots, \end{aligned} \quad (5.53)$$

где A_i и B_i - коэффициенты, для определения которых в данном случае имеется шесть узловых параметров.

Поскольку в первых двух уравнениях (5.53) коэффициенты A_i одни и те же, то они однозначно устанавливаются по четырем соответствующим узловым перемещениям w_1, ψ_1 и w_2, ψ_2 и, следовательно, для $w(x)$ можно задать четырехчленный полином второй или третьей степени. При этом, имея в виду структуру (5.53), $v(x)$ будет полиномом второй или третьей степени, постоянные B_i которого уже не могут быть определены по двум оставшимся узловым параметрам v_1 и v_2 . Таким образом, при условии равенства узловых перемещений в двух общих узлах смежных элементов нельзя, задавшись (5.53), обеспечить неразрывность первой производной от $w(x, y)$ по нормали к линии стыка между элементами. Кроме этого, при таком подходе оказывается невозможно единственным образом определить значения вторых смешанных производных в узловых точках конечных элементов. Так, например, на стороне *I-2*, расположенной вдоль оси *x*, функция $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ зависит только

от перемещений в узлах *I* и *2*, а на стороне *I-3* по направлению оси *y* от параметров в узлах *I* и *3*. Отсюда следует, что в общей узловой точке *I* возникает противоречие.

В работе [1] установлено, что если в качестве узловых параметров выбираются прогибы и углы поворота нормалей, то интерполяционную функцию для $w(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям совместности, принципиально нельзя представить в виде полинома (5.52).

Этот вывод распространяется и на случай, когда стороны элемента в рассматриваемом узле пересекаются под произвольным углом.

В работах [3,14,16] разработано немало приемов, с помощью которых можно преодолеть отмеченные затруднения. Например, в работе [14] для прямоугольного элемента смешанная производная была принята в качестве узлового параметра. В работе [4] для непрямоугольного элемента исследовался эффект включения в узловые параметры производные высших порядков. Однако на практике нашли применение, в основном, так называемые, «несовместные» конечные элементы, матрицы которых строятся на базе интерполяционных функций, обеспечивающих непрерывность при переходе от элемента к элементу только $w(x, y)$ и первой производной по касательной к линии стыка между элементами. При этом в каждой узловой точке условия совместности выполняются для всех трех параметров. В работе [12] доказано,

что при таком подходе практически всегда численное решение стремится к точному аналитическому, полученному в рамках гипотез классической теории тонких плит.

5.3.3. Дискретная модель плиты любого очертания достаточно просто и точно строится с помощью конечных элементов треугольной формы. Кроме того, как будет показано далее, такие элементы могут быть с успехом использованы и для расчета оболочек.

Рассмотрим треугольный элемент тонкой плиты (рис.5.2). Выберем в качестве узловых параметров, определяющих его напряженно-деформированное состояние, физически очевидные узловые перемещения: прогибы и углы поворота нормалей вокруг осей x и y . При этом для углов поворота считаем справедливым соотношения (5.51). В результате степень свободы такого элемента будет равна 9, совокупность обобщенных узловых перемещений образует вектор $\{q\}_i = \{\{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)}\}$, где каждый из блоков равен

$$\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)}\} = \left\{ w_k - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_k \right\} = \{w_k \nu_k \psi_k\}. \quad (5.54)$$

Имея в виду доводы, изложенные в п.5.3.2, применение таких элементов не обеспечивает неразрывность углов наклона нормалей в плоскостях, перпендикулярных сторонам-границам между смежными элементами, т.е. в этом случае треугольные элементы оказываются “несовместными”.

Напомним, что напряженно-деформированное состояние тонкой плиты определяется с помощью одной неизвестной величины – прогиба срединной поверхности w .

Дальнейшая задача состоит, как и прежде, в построении матрицы интерполяционных функций, и, вслед за тем, в определении матриц деформаций, жесткости и т.д.

Матрица интерполяционных функций, в данном случае, должна связать независимые узловые параметры элемента, характеризуемые вектором $\{q\}_i$, с одной единственной величиной внутри элемента – прогибом срединной плоскости w , т.е. матрица интерполяционных функций $[C]$ вырождается в матрицу – строку

$$w = [C] \{q\}_i, \quad (5.55)$$

где $[C] = \{C\}^T$.

Учитывая структуру вектора узловых параметров (5.52), $[C]$ имеет блочную структуру с числом блоков, равным числу узлов, т.е.

$$[C] = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} \right]. \quad (5.56)$$

Каждый из блоков представляет собой влияние обобщенных перемещений k -го узла $\{q_j\}^{(k)} = \{w_k \ v_k \ \psi_k\}$ ($k=1,2,3$) на прогиб w внутри элемента, т.е.

$$[C]^{(k)} = \left(\{C\}^{(k)} \right)^T = \left[C_w^{(k)}(x, y) C_v^{(k)}(x, y) C_\psi^{(k)}(x, y) \right]. \quad (5.57)$$

Таким образом, речь идет, по существу об интерполяции Эрмита (см. п.П.5.3), при которой требуется найти интерполяционный многочлен для функции w , когда в узлах заданы не только значения функций, но и ее производные $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Для получения интерполяционных эрмитовых функций можно, конечно же, воспользоваться традиционным путем, задавая неизвестную функцию в виде неполного полинома четвертой степени, содержащей 9 членов по числу узловых параметров

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + \alpha_9 xy^2) + \alpha_9 y^3. \quad (5.58)$$

Напомним, что полный полином 4-ой степени содержит 15 членов. Эти 12 параметров могут быть получены подстановкой значений функции (5.56), а также ее производных в узловых точках. Однако этот путь представляется не самым удачным, т.к. требует решения системы уравнений 12-го порядка. Можно обойти эти трудности, записав сразу интерполяционные эрмитовы полиномы в нормализованных L - координатах [3], введенных в п.3.1.5.

$$\begin{aligned} C_w^{(k)} &= L_k + L_k^2 L_n + L_k^2 L_j - L_k L_n^2 - L_k L_j^2; \\ C_v^{(k)} &= b_n (L_k^2 L_n + \frac{1}{2} L_j L_k L_n) - b_j (L_k^2 L_j + \frac{1}{2} L_j L_k L_n); \quad (k=1,2,3; j=2,3,1; n=3,1,2) \\ C_\psi^{(k)} &= c_n (L_k^2 L_j + \frac{1}{2} L_j L_k L_n) - c_j (L_k^2 L_n + \frac{1}{2} L_j L_k L_n), \end{aligned} \quad (5.59)$$

где коэффициенты b_k и c_k ($k=1,2,3$) определены в выражении (3.21).

Можно убедиться, что все функции в (5.59) действительно удовлетворяют требованиям, предъявляемым к интерполяционным функциям. Так, если первая из них равна единице в узле с координатами x_k, y_k и нулю в остальных, то две другие равны нулю во всех узлах, но зато производная от них по x и по y будут равны в рассматриваемом узле -1 и $+1$. Каждая из функций и все они вместе взятые единственным образом определяют кубичный закон изменения прогиба по области элемента, и, следовательно, вдоль линии стыка со смежными элементами. Это, как известно, обеспечивает неразрывность функции w , а также ее производных по касательной к линии-границе при переходе от элемента к элементу. К сожалению, в этом случае нормальные производные, изменение которых осуществляется по параболе второго порядка, неоднозначно определяются двумя узловыми параметрами на каждой стороне элемента, обуславливая его несовместность. Вместе с тем, заданная

таким образом матрица интерполяционных функций дает возможность получить любое произвольное значение кривизн во всех точках элемента, что позволяет добиться сходимости решения [12].

Располагая выражением для типового блока матрицы интерполяционных функций, все выражения для рассматриваемого элемента могут быть получены по стандартным формулам. Так матрица деформаций $[B]$ определяется с помощью (5.21)

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} w = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} [C]\{q\}_i = [B]\{q\}_i. \quad (5.60)$$

Откуда типовой блок матрицы $[B] = \left[[B]^{(1)} [B]^{(2)} [B]^{(3)} \right]$ равен

$$[B]^{(k)} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} [C]^{(k)} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} \left\{ C_w^{(k)} C_v^{(k)} C_\psi^{(k)} \right\} = -\frac{1}{2\Delta_i^2} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

Учитывая, что вторые и смешанные производные сложной функции определяются по формулам [6]

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 C}{\partial L^2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial y} \end{Bmatrix} + \frac{\partial C}{\partial L} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (5.62)$$

после выполнения дифференцирования получим следующие выражения для компонент матрицы (5.61)

$$\begin{aligned}
B_{11} &= b_k^2 (L_j + L_n) + b_k b_j (L_k - L_j) + 2b_k b_n (L_k - L_n) - L_k^2 (b_j^2 + b_n^2); \\
B_{12} &= b_k^2 (L_j b_n + L_n b_j) + \frac{1}{2} (b_n - b_j) (L_k b_j b_n + L_j b_n b_k + L_n b_k b_j); \quad (k = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; n = 3, 1, 2) \\
B_{13} &= b_k^2 (L_j c_n - L_n c_j) + \frac{1}{2} (c_n - c_j) (L_k b_j b_n + L_j b_n b_k + L_n b_k b_j) + 2L_k^2 b_k (c_j b_n - c_n b_j).
\end{aligned}$$

Вторая строка получается заменой параметров b на c и наоборот.
Третья строка:

$$\begin{aligned}
B_{31} &= 2 \left[b_k c_k (L_j + L_n) + (b_j c_k + b_k c_j) (L_k - L_j) + (b_n c_k + b_k c_n) (L_k - L_n) + L_k (b_j c_n + b_n c_j) \right]; \\
B_{32} &= \frac{1}{2} (b_n - b_j) \left[L_n (b_k c_j + b_n c_j) + L_j (b_k c_n + b_n c_k) + L_k (b_j c_n + b_n c_j) \right] + \\
&\quad + 2 \left[L_k b_k (b_n c_j - b_j c_n) + b_k c_k (L_j b_n - L_n b_j) \right]; \\
B_{33} &= \frac{1}{2} (c_n - c_j) \left[L_n (b_k c_j + b_n c_j) + L_j (b_k c_n + b_n c_k) + L_k (b_j c_n + b_n c_j) \right] + \\
&\quad + 2 \left[L_k b_k (b_n c_j - b_j c_n) + b_k c_k (L_j c_n - L_n c_j) \right]
\end{aligned}$$

Матрица жесткости конечного элемента определяется, как и для плоского треугольника, по следующей формуле

$$[K]_{ij}^{(\kappa)} = \int_0^{1-L_1} \int_0^{L_1} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(\kappa)} \det |J| dL_1 dL_2. \quad (5.63)$$

Учитывая громоздкость выражения для матрицы деформаций, матрицу жесткости элемента лучше всего вычислять численно с помощью стандартных процедур численного интегрирования по треугольнику (см. п.3.1).

5.3.4. Приведем полный текст подпрограммы вычисления матрица жесткости треугольного элемента тонкой плиты, которая входит в состав библиотеки конечных элементов программного комплекса "Concord" [5]. Подпрограмма написана на алгоритмическом языке Фортран. Матрица жесткости элемента получается численным интегрирование по треугольнику с тремя точками интегрирования в серединах сторон.

```

C*****
C   ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ
C   ТРЕУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ИЗГИБАЕМОЙ ПЛИТЫ
C*****
      SUBROUTINE STIF3(D,ESTIFM,XU,YU,H)
C*****
C   ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C       D(3,3) – матрица упругости для плоской задачи
C       XU(3)- массив координат x узлов
C       YU(3)- массив координат y узлов
C       H – толщина элемента
C   РАБОЧИЕ МАССИВЫ И ПАРАМЕТРЫ:
C       CL(3) –L–координаты текущих точек интегрирования

```

RETURN
END

5.3.5. Обсудим несколько способов построения треугольных конечных элементов, совместных относительно функции $w(x, y)$ и ее производных.

Первым рассмотрим способ, при котором в каждый узел элемента вводится по шесть узловых параметров. Так для типового k -го узла

$$\{q\}_i^{(k)} = \left\{ w_k \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_k \right\}, \quad (5.64)$$

а закон для прогибов по области элемента принимается в виде полного полинома пятой степени

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \\ & + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^4 + \alpha_{12} x^3 y + \alpha_{13} x^2 y^2 + \alpha_{14} xy^3 + \alpha_{15} y^4 + \\ & + \alpha_{16} x^5 + \alpha_{17} x^3 y^2 + \alpha_{18} x^2 y^3 + \alpha_{19} xy^4 + \alpha_{20} y^5 + \alpha_{21} x^4 y. \end{aligned} \quad (5.65)$$

К (5.65) присоединяют дополнительные условия – перемещения по нормали к каждой стороне должны описываться полиномом не выше третьего порядка.

Второй способ заключается в том, что кроме (5.64) вводятся дополнительные узловые параметры в виде нормальной производной $\frac{\partial w}{\partial n}$ в серединах каждой из

сторон. В результате конечный элемент будет обладать 21 степенью свободы и, следовательно, все коэффициенты полинома пятой степени (5.65) можно найти, подставив в него значения этих узловых параметров.

Третий способ связан с введением “корректирующих” функций $f(x, y)$, таких, чтобы они и их производные равнялись нулю во всех узлах, в серединах же сторон производные были равны единице и менялись вдоль соответствующей стороны по параболическому закону. Этим условиям удовлетворяет, например, функция для стороны 1-2

$$f_{12}(x, y) = \frac{L_1^2 L_2^2 L_3}{(L_1 + L_2)(L_1 + L_3)}, \quad (5.66)$$

для остальных сторон функции формулируются аналогично. “Корректирующие” функции $f(x, y)$ добавляются к начальным интерполяционным функциям. С помощью новых интерполяционных функций можно обеспечить линейный закон изменения нормальных производных вдоль любой стороны треугольника.

Подробнее о конструировании совместных треугольных элементов тонкой плиты можно познакомиться в литературе [2,13,15,16].

5.3.6. Применительно к конечным элементам треугольной формы операции, связанные с приведением распределенных нагрузок к узловыми силам (в том числе и построение матриц инерции), ничем, по существу не отличается от тех, какие уже не раз были описаны ранее. Заметим, что и переход от отдельных элементов к ансамблю, представляющему идеализированную расчетную схему плиты (сборка системы уравнений равновесия), осуществляется стандартным образом.

5.3.7. Рассмотрим “несовместный” элемент тонкой плиты прямоугольной формы с четырьмя узловыми точками (рис.5.3). Вектор узловых перемещений, определяющий состояние этого элемента, имеет следующую структуру $\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \{q\}_i^{(3)} \{q\}_i^{(4)} \right\}$, где каждый из блоков, по-прежнему, равен

$$\{q\}_i^{(k)} = \left\{ q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)} \right\} = \left\{ w_k - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_k \right\} = \{w_k \nu_k \psi_k\}. \quad (5.67)$$

Матрица интерполяционных функций $[C]$, связывающая прогибы срединной плоскости w с вектором $\{q\}_i$ (5.55), имеет блочную структуру с числом блоков, равным числу узлов, т.е.

$$[C] = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)} \right]. \quad (5.68)$$

Каждый из блоков представляет собой влияние обобщенных перемещений k -го узла на прогиб w внутри элемента, т.е.

$$[C]^{(k)} = \left(\{C\}^{(k)} \right)^T = \left[C_w^{(k)}(x, y) C_\nu^{(k)}(x, y) C_\psi^{(k)}(x, y) \right]. \quad (5.69)$$

Имеется несколько возможностей построения интерполяционных функций, а следовательно, и интерполяционной матрицы для такого элемента.

Можно задать неполный полином четвертой степени, содержащий 12 членов по числу степеней свободы элемента [3]

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (5.70)$$

Нетрудно видеть, что, например, на стороне 1-3, где $y = \text{const}$, этот полином становится параболой третьего порядка $w(x, y) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3$, а

$\frac{\partial w}{\partial x} = A_2 x + 2A_3 x + 3A_4 x^2$ параболой второго порядка и, следовательно, прогиб линии стыка между смежными элементами, а также угол наклона вдоль нее описывается однозначно, поскольку в общих узлах 1 и 3 равны вертикальные перемещения и углы наклона ψ . В то же время, полином (5.70) не может обеспечить неразрывность первой производной $\frac{\partial w}{\partial y}$, т.к. на рассматриваемой стороне остается только два узловых параметра v_1 и v_3 для определения четырех коэффициентов в уравнении $\frac{\partial w}{\partial y} = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3$. Аналогичная картина наблюдается и на стороне $x = \text{const}$.

Таким образом (5.70) приводит к несовместным элементам прямоугольной формы.

Из (5.70), следуя обычным путем, подставляя значения узловых параметров, можно получить систему 12 линейных алгебраических уравнений с 12 неизвестными коэффициентами α_i , решая которую, можно построить интерполяционные полиномы

$$\begin{aligned} C_w^{(k)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} \left[(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(2 + \xi_k \xi + \eta_k \eta - \xi^2 - \eta^2) \right]; \\ C_v^{(k)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} b \eta_k (1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)^2 (\eta_k \eta - 1); \\ C_\psi^{(k)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} a \xi_k (1 + \eta_k \eta)(1 + \xi_k \xi)^2 (\xi_k \xi - 1), \end{aligned} \quad (5.71)$$

где a, b – половины сторон элемента, ξ и η – естественные, нормализованные координаты для прямоугольника, определяемые, как и ранее, по формулам

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}, \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}. \quad (5.72)$$

Имея в виду, что $w(\xi, \eta) = [C]\{q\}_i$, согласно (5.21) можно записать

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 1 & \partial^2 \\ a^2 & \partial \xi^2 \\ 1 & \partial^2 \\ b^2 & \partial \eta^2 \\ 2 & \partial^2 \\ ab & \partial \xi \partial \eta \end{Bmatrix} [C]\{q\}_i = [B]\{q\}_i, \quad (5.73)$$

откуда типовой блок матрицы $[B] = \left[[B]^{(1)} [B]^{(2)} [B]^{(3)} [B]^{(4)} \right]$ равен

$$[B]^{(k)} = - \begin{bmatrix} \frac{3}{4a^2} \xi_k \xi (1 + \eta_k \eta) & 0 & \frac{\xi_k}{a} (1 + 3\xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) \\ \frac{3}{4b^2} \eta_k \eta (1 + \xi_k \xi) & \frac{\eta_k}{b} (1 + \xi_k \xi) (1 + 3\eta_k \eta) & 0 \\ \frac{\xi_k \eta_k}{4ab} (3\xi^2 + 3\eta^2 - 4) & \frac{\xi_k}{2a} (1 - 2\eta_k \eta - 3\eta^2) & \frac{\eta_k}{2b} (1 - 2\xi_k \xi - 3\xi^2) \end{bmatrix}. \quad (5.74)$$

Матрицу жесткости элемента получим по формуле для ее типового блока

$$[K]_{ij}^{(\kappa)} = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(\kappa)} d\xi d\eta. \quad (5.75)$$

После интегрирования будем иметь

$$[K_c]_{ij}^{(\kappa)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.76)$$

где

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{4ab} \left[\frac{3D_{11}}{m^2} \xi_k \xi_j (1 + \frac{1}{3} \eta_j \eta_k) + 3m^2 D_{22} \eta_j \eta_k (1 + \frac{1}{3} \xi_j \xi_k) + (2D_{12} + 5.6D_{33}) \xi_k \xi_j \eta_j \eta_k \right]; \\ k_{12} &= \frac{1}{b} \left[\frac{D_{12}}{m} \xi_k \xi_j \eta_k (1 + \eta_j \eta_k) + 3mD_{22} \eta_j (1 + \frac{1}{3} \xi_j \xi_k) - (D_{13} \eta_k + \frac{2}{5m} D_{33} \eta_j) \xi_k \xi_j \eta_j \right]; \\ k_{13} &= \frac{1}{a} \left[\frac{D_{11}}{m} (1 + \eta_j \eta_k) + \frac{D_{12}}{m} \xi_k \xi_j \eta_j (1 + 3\xi_j \xi_k) - (D_{13} \eta_k - 0.4mD_{33} \eta_k) \eta_j \xi_j \right]; \\ k_{21} &= \frac{1}{b} \left[\frac{D_{12}}{m} \xi_k \xi_j \eta_j (1 + \eta_j \eta_k) + 3mD_{22} \eta_k (1 + \frac{1}{3} \xi_j \xi_k) - (D_{23} \eta_j + \frac{2}{5m} D_{33} \xi_k) \xi_k \eta_j \right]; \\ k_{22} &= 4D_{22} m \eta_k \eta_j (1 + \frac{1}{3} \xi_j \xi_k) (1 + 3\eta_j \eta_k) + 4D_{23} (\xi_k \eta_k + \xi_j \eta_j) + \frac{D_{33}}{m} \xi_k \xi_j (1.8 + \frac{2}{3} \eta_j \eta_k); \\ k_{23} &= 4D_{12} \xi_k \eta_j (1 + 3\xi_j \xi_k) (1 + 3\eta_j \eta_k) - \frac{4}{3} (D_{23} m - \frac{D_{13}}{m}) \xi_k \eta_k \xi_j \eta_j; \\ k_{31} &= \frac{1}{a} \left[\frac{D_{11}}{m} \xi_k (1 + \frac{1}{3} \eta_j \eta_k) + D_{12} m \xi_j \eta_k \eta_j (1 + 3\xi_j \xi_k) - D_{13} (\eta_j - \eta_k) \xi_j \xi_k - 0.4mD_{33} \xi_k \eta_k \eta_j \right]; \\ k_{32} &= 4D_{12} \xi_j \eta_k (1 + 3\xi_j \xi_k) (1 + 3\eta_j \eta_k) - \frac{4}{3} (D_{23} m - \frac{D_{13}}{m}) \xi_k \eta_k \xi_j \eta_j; \\ k_{33} &= 4D_{11} m \xi_j \eta_k (1 + \frac{1}{3} \xi_j \xi_k) (1 + 3\eta_j \eta_k) - 4D_{13} (\xi_k \eta_k + \xi_j \eta_j) + D_{33} m \eta_k \eta_j (1.8 + \frac{2}{3} \xi_j \xi_k); \\ m &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

5.3.8. Матрица жесткости прямоугольного элемента плиты может быть искусственно синтезирована с помощью одномерных интерполяционных полиномов Эрмита (см. П.5.3)

$$\begin{aligned}
N_k(\xi) &= -\frac{1}{4}\xi_k\xi^3 + \frac{3}{4}\xi_k\xi + \frac{1}{2}; & \bar{N}_k(\xi) &= \frac{a}{4}(\xi^3 + \xi_k\xi^2 - \xi - \xi_k); \\
N_k(\eta) &= -\frac{1}{4}\eta_k\eta^3 + \frac{3}{4}\eta_k\eta + \frac{1}{2}; & \bar{N}_k(\eta) &= \frac{b}{4}(\eta^3 + \eta_k\eta^2 - \eta - \eta_k).
\end{aligned}
\tag{5.77}$$

Напомним, что одномерные полиномы Эрмита представляют собой функции прогибов однопролетной балки с защемленными концами при единичном смещении k -го узла на единицу и при единичном повороте того же узла. Поэтому эти функции иногда называют балочными.

Интерполяционные функции для плиты с использованием (5.77) могут быть представлены так

$$\begin{aligned}
C_w^{(k)}(\xi, \eta) &= N_k(\xi)N_k(\eta); \\
C_v^{(k)}(\xi, \eta) &= N_k(\xi)\bar{N}_k(\eta); \\
C_\psi^{(k)}(\xi, \eta) &= N_k(\eta)\bar{N}_k(\xi).
\end{aligned}
\tag{5.78}$$

Отметим, что синтезированные таким образом интерполяционные функции удовлетворяют требованиям к ним, в рассматриваемом узле они равны единице, в остальных – нулю. Кроме того, использование (5.78) гарантирует неразрывность перемещений и углов поворота на сторонах границ между смежными элементами. Однако смешанные производные в узлах не совпадают.

Типовой блок матрицы деформаций получается по формуле (5.21) и имеет вид

$$[B]^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2a^2}\xi_k\xi N^{(k)}(\eta) & \frac{3}{2a^2}\xi_k\xi \bar{N}^{(k)}(\eta) & -\frac{3\xi + \xi_k}{2a} N^{(k)}(\eta) \\ \frac{3}{2b^2}\eta_k\eta N^{(k)}(\xi) & -\frac{3\eta + \eta_k}{2b} N^{(k)}(\xi) & \frac{3}{2b^2}\eta_k\eta \bar{N}^{(k)}(\xi) \\ -\frac{9}{8ab}\xi_k\eta_k(1-\xi^2)(1-\eta^2) & \frac{3}{2a}\xi_k\xi(3\eta + \eta_k) & \frac{3}{2b}\eta_k\eta(3\xi + \xi_k) \end{bmatrix}. \tag{5.79}$$

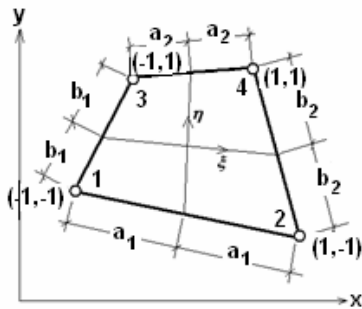


Рис.5.4. Четырехугольный элемент плиты

Матрица жесткости вновь будет определяться по формуле (5.75). Однако, несмотря на то, что все интегралы в данном случае могут быть получены в замкнутом виде, значительно проще определять их численно с помощью процедуры Гаусса.

5.3.9. С помощью треугольных конечных элементов можно добиться удовлетворительной аппроксимации плит любой геометрии в плане. Однако, число элементов при этом значительно

больше, чем при аппроксимации прямоугольниками. Альтернативой может служить элемент в виде четырехугольника общего вида. Чаще всего такой элемент конструируют из двух простых треугольников [3]. Но, по существу, это не значительно снижает трудоемкость расчетов. Значительно эффективней элемент субпараметрического типа (см. п. 3.3) (рис.5.4), для описания геометрии которого используется параметрическое отображение координат (рис.3.6). В соответствии с (3.71)

$$x = \sum_{k=1}^4 C_k(\xi, \eta) x_k; \quad y = \sum_{k=1}^4 C_k(\xi, \eta) y_k, \quad (5.80)$$

где x_k, y_k - координаты узлов четырехугольника; $C_k(\xi, \eta)$ - линейные интерполяционные полиномы Лагранжа

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta). \quad (5.81)$$

Для интерполяции узловых перемещений используются функции (5.78). Однако, анализируя их, видим, что в выражения для функций $\bar{N}_k(\xi)$ и $\bar{N}_k(\eta)$ входят в явном виде параметры a и b , представляющие собой половины сторон прямоугольника. Для элемента на рис.5.4 эти параметры являются переменными, причем $a = a(\eta)$, $b = b(\xi)$. Для их определения также предлагается использовать линейную интерполяцию вида

$$a(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (1 + \eta_k \eta) a_k; \quad b(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (1 + \xi_k \xi) b_k, \quad (5.82)$$

где a_k, b_k ($k=1,2$) - длины сторон элемента (рис.5.4).

Интерполяционные функции для этого элемента будут иметь вид

$$\begin{aligned} C_w^{(k)}(\xi, \eta) &= N_k(\xi) N_k(\eta); \\ C_v^{(k)}(\xi, \eta) &= a(\eta) N_k(\xi) \bar{L}_k(\eta); \\ C_\psi^{(k)}(\xi, \eta) &= b(\xi) N_k(\eta) \bar{L}_k(\xi). \end{aligned} \quad (5.83)$$

где функции N_k даны в выражении (5.78), а функции \bar{L}_k определяются по формулам

$$\bar{L}_k(\xi) = \frac{1}{4}(\xi^3 + \xi_k \xi^2 - \xi - \xi_k); \quad \bar{L}_k(\eta) = \frac{1}{4}(\eta^3 + \eta_k \eta^2 - \eta - \eta_k). \quad (5.84)$$

Матрица деформаций для типового k -го узла будет определяться по формуле (5.21)

$$[B]^{(k)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{C_w^{(k)} C_v^{(k)} C_\psi^{(k)}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C_w^{(k)}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 C_v^{(k)}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 C_\psi^{(k)}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 C_w^{(k)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 C_v^{(k)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 C_\psi^{(k)}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 C_w^{(k)}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 C_v^{(k)}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 C_\psi^{(k)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

В выражение (5.85) входят вторые и смешанные производные интерполяционных функций по глобальным переменным, которые необходимо выразить через производные в местных координатах ξ, η . Для этого воспользуемся соотношением (5.62), которое в данном случае будет иметь вид

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & 2J_{11}J_{12} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & 2J_{22}J_{21} \\ J_{11}J_{21} & J_{22}J_{12} & J_{12}J_{21} + J_{11}J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (5.86)$$

где J_{ij} - компоненты матрицы Якоби

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \xi} & \frac{\partial C_2}{\partial \xi} & \frac{\partial C_3}{\partial \xi} & \frac{\partial C_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial C_1}{\partial \eta} & \frac{\partial C_2}{\partial \eta} & \frac{\partial C_3}{\partial \eta} & \frac{\partial C_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}. \quad (5.87)$$

Подставив в (5.87) интерполяционные функции (5.81), получим

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \xi_k (1 + \eta_k \eta) x_k; & J_{12} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \xi_k (1 + \eta_k \eta) y_k; \\ J_{21} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \eta_k (1 + \xi_k \xi) x_k; & J_{22} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \eta_k (1 + \xi_k \xi) y_k. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Соотношение (5.86) запишем, введя соответствующие обозначения, в сокращенном виде

$$\left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \right\} = [J^2] \left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right\} + [\Delta] \left\{ \frac{\partial C}{\partial x} \right\} = [J^2] \left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right\} + [\Delta [J]]^{-1} \left\{ \frac{\partial C}{\partial \xi} \right\}, \quad (5.89)$$

откуда

$$\left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right\} = [J^2]^{-1} \left([J^2] \left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \right\} + [\Delta [J]]^{-1} \left\{ \frac{\partial C}{\partial \xi} \right\} \right). \quad (5.90)$$

Для интерполяционных функций (5.81), матрица $[\Delta]$ получается довольно простой

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Delta_x & \Delta_y \end{bmatrix}, \quad (5.91)$$

где $\Delta_x = \frac{1}{4}(x_1 + x_4) - \frac{1}{4}(x_2 + x_3)$; $\Delta_y = \frac{1}{4}(y_1 + y_4) - \frac{1}{4}(y_2 + y_3)$. Производные же в местных координатах представим в виде следующей матрицы

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C_w^{(k)}}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 C_v^{(k)}}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 C_\psi^{(k)}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 C_w^{(k)}}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 C_v^{(k)}}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 C_\psi^{(k)}}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 C_w^{(k)}}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 C_v^{(k)}}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 C_\psi^{(k)}}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \xi_k \xi N_k(\eta) & \frac{3}{4} \xi_k [(b_2 - b_1)^* * (1 - 2\xi^2) - b(\xi)\xi] \bar{L}_k(\eta) & \frac{1}{2} (3\xi + \xi_k) a(\eta) N_k(\eta) \\ -\frac{3}{2} \eta_k \eta N_k(\xi) & \frac{1}{2} (3\eta + \eta_k) b(\xi) N_k(\xi) & \frac{3}{4} \eta_k [(a_2 - a_1)^* * (1 - 2\eta^2) - a(\eta)\eta] \bar{L}_k(\xi) \\ \frac{3}{16} \xi_k \eta_k \xi \eta (1 - \xi^2)^* * (1 - \eta^2) & \frac{1}{4} (3\eta^2 + 2\eta_k \eta - 1)^* * [(b_2 - b_1) N^{(k)}(\xi) + \frac{3}{2} \xi_k b(\xi) (1 - \xi^2)] & \frac{1}{4} (3\xi^2 + 2\xi_k \xi - 1)^* * [(a_2 - a_1) N^{(k)}(\eta) + \frac{3}{2} \eta_k a(\eta) (1 - \eta^2)] \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

Матрицы, характеризующие данный элемент, получаются по общим формулам, в которые входит определенный интеграл по площади элемента. После замены переменных с переходом в систему координат ξ, η этот интеграл будет выглядеть так

$$I = h_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det|J| d\xi d\eta. \quad (5.93)$$

Здесь $\det|J|$ - определитель матрицы Якоби.

Напомним, что при вычислении матрицы жесткости

$$f(\xi, \eta) = [f(\xi, \eta)] = \left([B]^{(j)} \right)^T [D] [B]^{(k)}. \quad (5.94)$$

5.3.10. Приведем текст подпрограммы вычисления матрица жесткости сформулированного выше четырехугольного элемента общего вида для тонкой плиты, которая входит в состав библиотеки конечных элементов программного комплекса “Concord” [5]. Подпрограмма написана на алгоритмическом языке Фортран. Матрица жесткости элемента получается численным интегрированием по Гауссу с тремя точками интегрирования в каждом направлении.

```

C*****
C*** П/П ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА
C   ТОНКОЙ ПЛИТЫ
C*****
      SUBROUTINE STIF4(D,ESTIFM,XU,YU,THIC)
C*****
C ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   D(3,3) – матрица упругости для плоской задачи
C   XX (4,2) - массив декартовых координат узлов
C   THIC– толщина элемента
C РАБОЧИЕ МАССИВЫ И ПАРАМЕТРЫ:
C   X(2) –нормализованные координаты точек интегрирования
C   B(3,12)- матрица деформаций
C   BJ(3,2) –коэффициенты А и В
C   YAC(2,2),YAC2(3,3) – матрицы якоби 1-го и 2-го порядков
C   XG(3)-координаты узлов интегрирования
C   WGT(3)-веса квадратуры Гаусса-Лежандра
C   YYY-Якобиан
C   NINT1,NINT2 -число точек интегрирования в направлении X и Y
C   EST(78)–промежуточное значение матрицы жесткости
C ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   ESTIFM(78)- симметричная часть матрицы жесткости,
C   записанная по столбцам
C*****
      REAL *8 B(3,12),D(3,3),EST(78),X(2),
      *XG(3),XX(4,2),WGT(3),YAC(2,2),YAC2(3,3),ESTIFM(78)

```

```

C*** вторые производные
CP(1,1)=-1.5*U1*X1*W2
CP(1,2)=-1.5*U2*X2*W1
CP(1,3)=9./16.*U1*U2*(1.-X1*X1)*(1.-X2*X2)
CP(1,3)= CP(1,3)-(XK*AA2(1,1)+YK*AA2(2,1))*C(1,1)-
& (XK*AA2(1,2)+YK*AA2(2,2))*C(1,2)
CP(2,1)=0.5*U1*E2*(1.5*(B2-B1)*(1.-X1*X1)-3.*X1*BB)
CP(2,2)=0.5*BB*W1*(3.*X2+U2)
CP(2,3)=0.125*((B2-B1)*W1+1.5*U1*BB*(1.-X1*X1))*(3.*X2*X2+
& 2.*U2*X2-1.)
CP(2,3)=CP(2,3)-(XK*AA2(1,1)+YK*AA2(2,1))*C(2,1)-
& (XK*AA2(1,2)+YK*AA2(2,2))*C(2,2)
CP(3,1)=0.5*AA*W2*(3.*X1+U1)
CP(3,2)=0.5*U2*E1*(1.5*(A2-A1)*(1.-X2*X2)-3.*AA*X2)
CP(3,3)=0.125*((A2-A1)*W2+1.5*U2*AA*(1.-X2*X2))*(3.*X1*X1+
& 2.*U1*X1-1.)
CP(3,3)=CP(3,3)-(XK*AA2(1,1)+YK*AA2(2,1))*C(3,1)-
& (XK*AA2(1,2)+YK*AA2(2,2))*C(3,2)
C*** матрица деформаций
DO I=1,3
I1=I+(J-1)*3
B(1,I1)=YAC2(1,1)*CP(I,1)+YAC2(1,2)*CP(I,2)+YAC2(1,3)*CP(I,3)
B(2,I1)=YAC2(2,1)*CP(I,1)+YAC2(2,2)*CP(I,2)+YAC2(2,3)*CP(I,3)
B(3,I1)=-2.*(YAC2(3,1)*CP(I,1)+YAC2(3,2)*CP(I,2)+
& YAC2(3,3)*CP(I,3))
ENDDO
ENDDO ! конец цикла по узлам элемента
RETURN
END

```

5.3.10. В тонких плитах поперечные силы, так же как и в строительной механике стержневых систем, ни явно, ни косвенно, не вносят свой вклад в энергию деформирования, не участвуют в формировании матриц жесткости, их влиянием на деформированное состояние пренебрегают. Тем не менее, они входят в число силовых факторов, подлежащих определению. Их влияние на напряженное состояние конструкции, за исключением случая, когда она работает при чистом изгибе, бывает существенным, особенно в приопорных зонах, местах приложения сосредоточенных сил и т.д. Для определения поперечных сил используется уравнение “внутреннего” равновесия (5.12)

$$\{Q\} = -[\Phi_{pl}]^T \{M\} = -[\Phi_{pl}]^T [D_c] \{\chi\} = -[\Phi_{pl}]^T [D_c] [\Phi] \{q\}_i = [E_q] \{q\}_i, \quad (5.95)$$

Здесь матрица $[E_q]$, учитывая блочность вектора $\{q\}_i$, также блочная. Число блоков определяется числом узлов элемента. Опуская промежуточные выкладки, приведем типовой блок в виде

$$[E_q]^{(k)} = \begin{Bmatrix} D_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + D_{23} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + 3D_{13} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\ D_{13} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + D_{12} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{23} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \end{Bmatrix} \left\{ \{C\}^{(k)} \right\}^T,$$

где $\left\{ \{C\}^{(k)} \right\}^T$ - матрица-строка интерполяционных функций для k -го узла (5.57).

5.3.11. Казалось бы, что получаемое решение для плит средней толщины, конечные элементы которых описаны в п. 5.2, при уменьшении толщины должно приводить к решению, асимптотически приближающемуся к решению, получаемому с помощью элементов тонких плит. Однако на самом деле этого не происходит, в действительности, чем меньше относительная толщина плиты, тем результаты ее

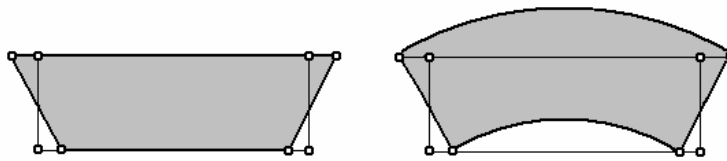


Рис.5.5. Эффект «ложного сдвига»

расчета по теории плит средней толщины все больше отклоняются от результатов, полученных с помощью теории тонких плит, причем наблюдается заметное «ужесточение» конструкции. Это явление отмечается в работе [8] и объясняется эффектом «ложного сдвига»

[7], который обусловлен независимостью сдвиговых составляющих в теории Тимошенко-Рейсснера, в то время, как в теории Кирхгофа-Лява сдвиг и изгиб взаимозависимы. Сдвиг вызывают дополнительные прогибы элемента. В качестве иллюстрации вышесказанного приведем пример из книги [8] (рис.5.5). Поэтому использовать конечные элементы плит средней толщины следует с большой осторожностью, применять их только в том случае, когда речь идет действительно о плитах средней толщины или толстых.

5.4. Тонкие оболочки

5.4.1. Тонкие оболочки, по существу, представляют собой тонкие плиты, срединная плоскость которой трансформирована за счет предварительного деформирования из плоскости в некоторую поверхность одинарной или двойной кривизны. В результате, при внешней поперечной нагрузке в ее поперечных сечениях появляются усилия, вызванные не только изгибом, но и растяжением-сжатием срединной поверхности, которые уравновешивают значительную часть внешней нагрузки.

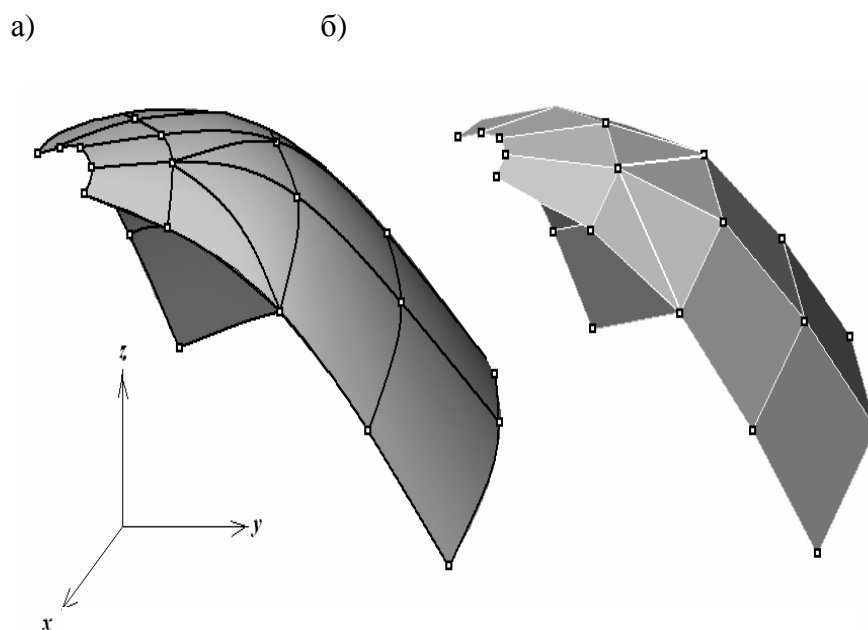


Рис.5.6. Конечноэлементная аппроксимация оболочек.

Существуют два принципиально различных подхода к аппроксимации тонких оболочек конечными элементами. Первый способ основан на представлении их набором пологих оболочечных элементов (рис.5.6а) постоянной гауссовой кривизны. Допущение о пологости позволяет считать горизонтальные перемещения и прогибы независимыми, а значит, применять те же интерполяционные функции, что и для плоских элементов. Различные варианты оболочечных криволинейных конечных элементов рассматриваются в работах [2,4,9]. В то же время, как отмечается в работе [3], в выражении для энергии оболочечных элементов содержатся члены, характеризующие взаимное влияние друг на друга изгибных и мембранных составляющих. Кроме того, их применение вызывает ряд неудобств. Прежде всего, форма срединной поверхности оболочки должна быть описана аналитической зависимостью. Применение постоянных главных радиусов кривизн для конечных элементов, фактически означает, что точно можно аппроксимировать только поверхности второго порядка. Проблемы возникают также при расчете тонкостенных конструкций, имеющие изгибы и изломы срединной поверхности.

Поэтому, в настоящее время, большее распространение получил второй подход, основанный на предположении, что поведение непрерывной криволинейной поверхности достаточно точно характеризуется поведением поверхности, составленной из малых плоских элементов треугольной или четырехугольной формы (рис.5.6б) [3]. Для построения такой поверхности нет необходимости описывать ее аналитически, достаточно лишь задать координаты узловых точек на ней. Это позволяет рассчитывать оболочки любых форм, а не только регулярные. Кроме того, при построении матриц таких элементов автоматически учитывается независимость деформаций и усилий в плоскости элемента от его изгибных деформаций и усилий.

Это позволяет получить их объединением матриц для плоской задачи и тонкой плиты, полученных ранее.

5.4.2. Рассмотрим типичный конечный плоский оболочечный конечный элемент треугольной или четырехугольной формы, находящийся под действием мембранных и изгибных усилий (рис.5.7). Плоскость элемента совместим с плоскостью xOy общей системы

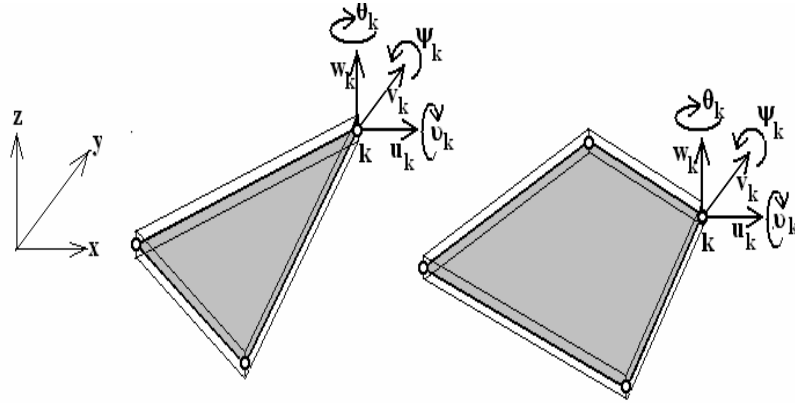


Рис.5.7. Плоские оболочечные конечные элементы

прямоугольных декартовых координат. Перемещения каждого k -го узла элемента будем характеризовать шестью компонентами линейных и угловых перемещений, совокупность которых образует вектор

$$\{q\}_i^{(k)} = \{u_k v_k w_k \psi_k \theta_k\}. \quad (5.96)$$

Здесь угол поворота θ_z вокруг оси z включен в состав узловых параметров по причинам, которые будут ясны дальше при рассмотрении преобразования координат. Первые два перемещения обусловлены мембранными составляющими усилий в плоскости элемента, последние четыре вызваны изгибом. Поскольку в плоских элементах мембранные и изгибные составляющие не зависят друг от друга, то типовой блок матрицы жесткости элемента, имеющего по шесть степеней свободы в каждом узле, будет иметь вид

$$[K]_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} [K_{pl}]_{ij}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & [K_c]_{ij}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{pl11} & k_{pl12} \\ k_{pl21} & k_{pl22} \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} k_{c11} & k_{c12} & k_{c13} \\ k_{c21} & k_{c22} & k_{c23} \\ k_{c31} & k_{c32} & k_{c33} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.97)$$

Здесь индекс pl относится к блоку матрицы жесткости, который равен матрице жесткости треугольного или четырехугольного элемента, работающего при плоском напряженном состоянии (глава 3), c – к блоку, равному матрице жесткости аналогичного элемента при чистом изгибе, которые уже были рассмотрены в данной главе.

Будем полагать, что элемент произвольно ориентирован в пространстве. Местную систему координат, совмещенную с плоскостью элемента, в которой сформулирована матрица жесткости (5.97) обозначим x', y', z' (рис.5.8). Связь этой системы координат с общей x, y, z осуществляется с помощью матрицы направляющих косинусов

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{x'x} & m_{x'y} & m_{x'z} \\ m_{y'x} & m_{y'y} & m_{y'z} \\ m_{z'x} & m_{z'y} & m_{z'z} \end{bmatrix}. \quad (5.98)$$

Эта матрица служит для преобразования перемещений, причем преобразование

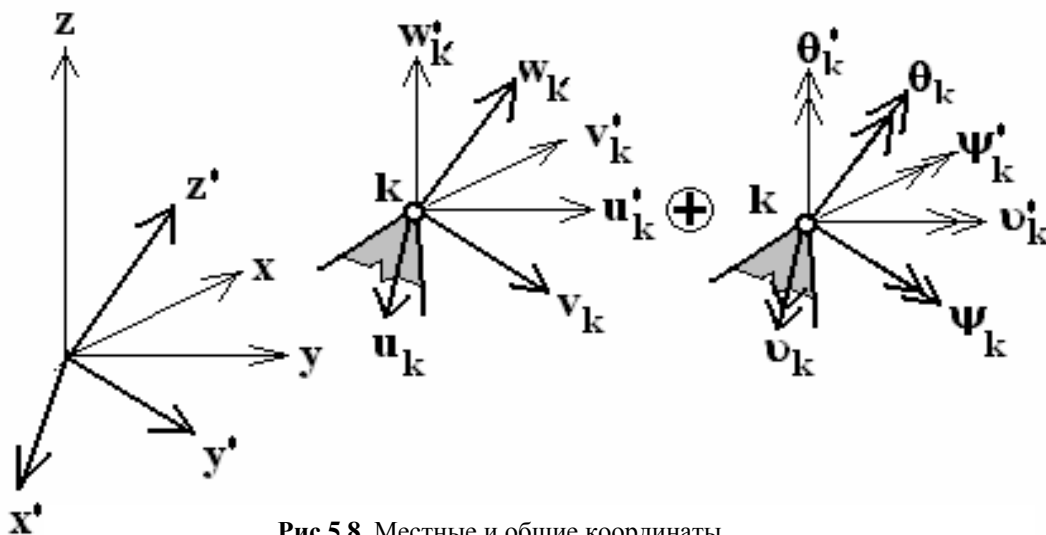


Рис.5.8. Местные и общие координаты

линейных перемещений и угловых осуществляется одинаково, т.е.

$$\begin{Bmatrix} u'_k \\ v'_k \\ w'_k \end{Bmatrix} = [m] \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \psi'_k \\ \theta'_k \end{Bmatrix} = [m] \begin{Bmatrix} \psi_k \\ \theta_k \end{Bmatrix}. \quad (5.99)$$

Объединяя (5.99) в одно матричное уравнение, получим

$$\{q'\}_i^{(k)} = [M] \{q\}_i^{(k)}, \quad (5.100)$$

где $[M]$ - квазидиагональная матрица шестого порядка, имеющая вид

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & 0 \\ 0 & [m] \end{bmatrix}. \quad (5.101)$$

Лишь сейчас становится очевидным необходимость введения шестого узлового параметра θ_k . Именно с его помощью, посредством матрицы $[m]$, сохраняется возможность использовать одни и те же преобразования координат для линейных и угловых перемещений и сохранить симметрию соотношений (5.101).

Если в местной системе координат ввести в рассмотрение вектор узловых сил $\{R\}_i^{(k)}$, по структуре аналогичный вектору узловых перемещений и содержащий в качестве компонент три сосредоточенных силы и три момента, то нетрудно убедиться, что в общей системе координат этот вектор будет иметь вид

$$\{R\}_i^{(k)} = [M] \{R\}_i^{(k)}. \quad (5.102)$$

Учитывая, что $\{R'\}_i^{(k)} = [K']_{ij}^{(k)} \{q\}_i^{(j)}$ и $\{R\}_i^{(k)} = [K]_{ij}^{(k)} \{q\}_i^{(j)}$, где $[K']_{ij}^{(k)}$ и $[K]_{ij}^{(k)}$ - типовые блоки матрицы жесткости в местной и общей системах координат, получим

$$[K]_{ij}^{(k)} = [M]^T [K']_{ij}^{(k)} [M]. \quad (5.103)$$

К сожалению, использование четырехугольного элемента не всегда возможно, т.к. необходимым условием его существования, является требование, чтобы все четыре узла элемента лежали в одной плоскости. Это достигается при [6]

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.104)$$

Поэтому, при составлении программы, в которой реализуются подобные элементы, необходимо обязательно предусмотреть процедуру проверки данного условия.

К поверхностям, для которых выполняется условие (5.104), в частности, относятся поверхности второго порядка с положительной гауссовой кривизной.

5.4.3. В матрице жесткости элемента присутствуют компоненты, связанные с наличием в качестве шестого узлового параметра несуществующего угла поворота θ_k . И хотя это делалось чисто формально и учет θ_k выразился лишь в появлении в матрице жесткости в местной системе координат нулевых строк и столбцов, их наличие не препятствует преобразованию координат, в результате которого матрица

оказывается полностью заполненной ненулевыми членами, тем не менее, имеется один исключительный случай, когда матрица жесткости – вырожденная. Это происходит тогда, когда в узле сходятся элементы, плоскости которых компланарны. Тогда уравнение равновесия для крутящих моментов превращается в тождество $0=0$.

Имеется несколько возможностей обойти это затруднение. Во-первых, в указанную точку можно дополнительно ввести шестое кинематическое закрепление и исключить уравнение $0=0$ обычным способом при формировании глобальной матрицы системы. Во-вторых, при решении плоской задачи можно ввести в число основных неизвестных узловые перемещения $\theta_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)_k$. В-третьих, в шестую строку на диагональ матрицы жесткости вставить фиктивный малый коэффициент, например равный единице, для всех элементов, как компланарных, так и некомпланарных [3].

5.4.4. Рассмотрим получение матрицы направляющих косинусов (5.98). Местная система координат ориентирована в пространстве так, что ось z' направлена по нормали к плоскости элемента. Положение центра координат можно выбрать произвольно, совместив его, например, с узлом 1. Взаимно ортогональные оси x', y' в плоскости элемента ориентированы также произвольно. В этой связи выберем направление оси x' вдоль стороны 1-2. Направляющие косинусы этой оси в общей системе координат можно установить по формулам (П.80). Эти косинусы в совокупности образуют компоненты первой строки матрицы (5.98)

$$V_{1k} = \{m_{x'x} m_{x'y} m_{x'z}\}, \quad (5.105)$$

и равны

$$m_{x'x} = \frac{X_{21}}{L_{21}}; \quad m_{x'y} = \frac{Y_{21}}{L_{21}}; \quad m_{x'z} = \frac{Z_{21}}{L_{21}}, \quad (5.106)$$

где $X_{21} = x_2 - x_1$; $Y_{21} = y_2 - y_1$; $Z_{21} = z_2 - z_1$ - проекции вектора 1-2 на координатные оси; $L_{21} = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2}$ - длина стороны 1-2.

Направляющие косинусы оси z' , составляющие компоненты третьей строки матрицы (5.98),

$$V_{3k} = \{m_{z'x} m_{z'y} m_{z'z}\} \quad (5.107)$$

могут быть получены по формуле (П.84) в виде векторного произведения двух сторон треугольника, сходящихся в узле 1 (стороны 1-2 и 1-3), $V_{3k} = V_{12} \times V_{13}$

$$m_{z'x} = \frac{C_1}{L_z}; \quad m_{z'y} = \frac{C_2}{L_z}; \quad m_{z'z} = \frac{C_3}{L_z}, \quad (5.108)$$

где $C_1 = (m_{x'y}Z_{31} - m_{x'z}Y_{31}) / L_{31}$; $C_2 = (m_{x'z}X_{31} - m_{x'x}Z_{31}) / L_{31}$;
 $C_3 = (m_{x'x}Y_{31} - m_{x'y}X_{31}) / L_{31}$; $X_{31} = x_3 - x_1$; $Y_{31} = y_3 - y_1$; $Z_{31} = z_3 - z_1$;
 $L_{13} = \sqrt{X_{31}^2 + Y_{31}^2 + Z_{31}^2}$.

И, наконец, компоненты второй строки матрицы (5.98) можно получить в виде векторного произведения $V_{2k} = V_{3k} \times V_{1k}$, т.к. ось y' перпендикулярна одновременно осям x' и z'

$$m_{y'x} = m_{z'y}m_{x'z} - m_{z'z}m_{x'y}; \quad m_{y'y} = m_{z'z}m_{x'x} - m_{z'x}m_{x'z}; \quad m_{y'z} = m_{z'x}m_{x'y} - m_{z'y}m_{x'x}. \quad (5.109)$$

Таким образом, установлены все компоненты матрицы направляющих косинусов (5.98).

Приведем текст Фортран-программы, реализующей описанную процедуру определения матрицы направляющих косинусов, которая используется в программном комплексе "Concord" [5].

```

C*****
C   П/П ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОГО
C   ПЛОСКОГО ЭЛЕМЕНТА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ
C*****
      SUBROUTINE GEOM4(XX,PB)
C   ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   XX(4,3)-координаты узлов элемента
C   РАБОЧИЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   P(3,3) – матрица направляющих косинусов типового узла
C   ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   PB(24,24) – матрица направляющих косинусов для элемента
C*****
      REAL*8 P(3,3),PB(24,24),XX(4,3)
         X1=XX(1,1)
         X2=XX(2,1)
         X3=XX(3,1)
         X4=XX(4,1)
         Y1=XX(1,2)
         Y2=XX(2,2)
         Y3=XX(3,2)
         Y4=XX(4,2)
         Z1=XX(1,3)
         Z2=XX(2,3)
         Z3=XX(3,3)
         Z4=XX(4,3)
C   проверка компланарности
      A1=X2*Y3*Z4+Y2*Z3*X4+Z2*X3*Y4-X4*Y3*Z2-Y4*Z3*X2-Z4*X3*Y2
      A2=X1*Y3*Z4+Y1*Z3*X4+Z1*X3*Y4-X4*Y3*Z1-Y4*Z3*X1-Z4*X3*Y1
      A3=X1*Y2*Z4+Y1*Z2*X4+Z1*X2*Y4-X4*Y2*Z1-Y4*Z2*X1-Z4*X2*Y1
      A4=X1*Y2*Z3+Y1*Z2*X3+Z1*X2*Y3-X3*Y2*Z1-Y3*Z2*X1-Z3*X2*Y1
      DELTA=-A1+A2-A3+A4

```

```

DO KY=1,3
  I1=JY+(IY-1)*3
  J1=KY+(IY-1)*3
  PB(I1,J1)=P(JY,KY)
ENDDO
ENDDO
ENDDO
RETURN
END

```

5.5. Стержневые элементы

5.5.1. Метод конечных элементов в анализе стержневых конструкций принципиально ничем не отличается от классических методов строительной механики статически неопределимых систем. В данном случае, речь идет о методе перемещений, поскольку именно он был выбран в качестве основного варианта метода конечных элементов. Так как основные этапы и процедуры МКЭ являются универсальными и не зависят от конкретного вида используемых конечных элементов, то для стержневых систем остается лишь определиться с количеством и видом узловых перемещений, параметрами, определяющих его напряженно-деформированное состояние, установить для этих параметров статические, геометрические и физические зависимости. В основу должна быть положена гипотеза прямых недеформируемых нормалей, на базе которой построена теория изгиба стержней, позволяющая описать поведение стержня с помощью перемещений точек нейтральной оси.

Известно, что окончательный результат расчета статически неопределимых стержневых систем методом перемещений представляет собой сумму двух решений, полученных при расчете отдельных элементов на приложенную к ним нагрузку и системы в целом на узловые воздействия. Вместе с тем, метод конечных элементов дает возможность отказаться от необходимости расчета отдельных элементов на местную нагрузку, а также от последующего суммирования решений. Для этого достаточно, в случае, когда конструкция загружена распределенной нагрузкой, представить ее набором относительно малых конечных элементов, а заданную нагрузку заменить эквивалентной системой сосредоточенных сил, действующих в узлах. Очевидно, что полученное таким образом решение будет уже приближенным, его точность зависит от числа конечных элементов, на которые разбивается конструкция.

5.5.2. Рассмотрим процедуры получения матриц для стержневых элементов на примере сжато-изогнутого стержня, продольная ось которого и ось симметрии поперечного сечения лежат в плоскости действия сил, т.е. для, так называемого, плоского стержневого элемента (рис.5.9). Ось стержня ориентируем вдоль оси x . В качестве узлов выберем концевые поперечные сечения элемента, а в качестве узловых параметров линейные и угловые перемещения

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \right\}, \quad (5.110)$$

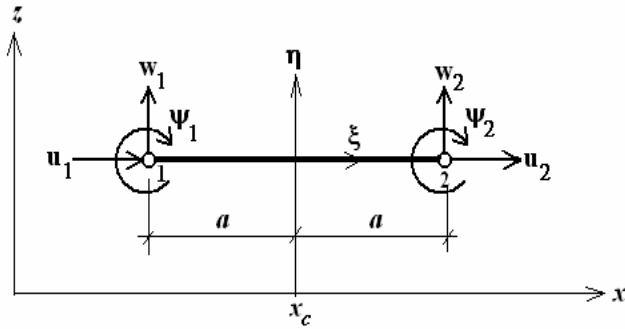


Рис.5.9. Плоский стержневой элемент.

где вектор перемещений в каждом узле содержит два линейных смещения вдоль осей координат и один угол поворота узла-сечения

$$\{q\}_i^{(k)} = \left\{ q_1^{(k)} q_2^{(k)} q_3^{(k)} \right\} = \{u_k w_k \psi_k\}. \quad (5.111)$$

В пределах конечного элемента перемещения его нейтральной оси описывается с помощью вектора $\{u\} = \{u, w, \psi\}$, где

u и w – продольное и поперечное перемещение нейтральной оси, ψ - угол поворота сечения в рассматриваемой точке этой оси. Поскольку между компонентами w и ψ существует зависимость $\psi = \frac{dw}{dx}$, из трех компонент вектора $\{u\}$ независимыми являются только две, т.е. $\{u\} = \{u, w\}$. Деформации нейтральной оси равны $\varepsilon = \frac{du}{dx}$, $\chi = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2 w}{dx^2}$. Т.е. геометрические уравнения задачи имеют вид

$$\{\chi\} = [\Phi]\{u\}, \quad (5.112)$$

где $\{\chi\} = \{\varepsilon \chi\}$, $[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}$.

Усилия в виде продольных сил и моментов в уровне нейтральной оси имеют вид

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF = \int_F E \varepsilon dF = \varepsilon \int_F E dF = A \varepsilon; \\ M &= \int_F \sigma z dF = \int_F E \frac{d\psi}{dx} z^2 dF = \frac{d^2 w}{dx^2} \int_F E z^2 dF = B \chi. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Где F - площадь поперечного сечения стержня; E – модуль деформации материала стержня, в общем случае переменный. Жесткости стержня при растяжении-сжатии и изгибе будут равны

$$A = \int_F E dF ; \quad B = \int_F E z^2 dF .$$

Выражения (5.112) представляют собой физические зависимости для стержня и в матричном виде могут быть записаны так

$$\{M\} = [D]\{\chi\}, \quad (5.114)$$

где $\{M\} = \{N \quad M\}$; $[D] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

В случае физически нелинейного материала, даже при постоянстве сечения стержня, его жесткости будут меняться по длине. В этом случае точность решения будет во многом определяться длиной элемента, в пределах которого жесткость всех сечений можно считать постоянной. Это достигается увеличением числа разбиений.

Для линейно упругих материалов жесткости сечений при растяжении-сжатии и изгибе определяются по стандартным формулам

$$A = EF ; \quad B = EJ , \quad (5.115)$$

где J – момент инерции при изгибе.

5.5.3. Переход от узловых перемещений к перемещениям внутри элемента в рамках стандартной механики стержневых систем можно осуществить точно, проинтегрировав дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня при различных краевых условиях, представляющих собой линейные и угловые единичные перемещения его концов. Это уравнение имеет вид

$$w^{IV}(x) = 0 , \quad (5.116)$$

Введем новую местную нормализованную координату $\xi = \frac{x - x_c}{a}$, ($-1 \leq \xi \leq 1$ и $dx = a d\xi$). Осуществляя замену переменных в (5.116) и последовательно интегрируя, получим

$$w(\xi) = \frac{c_1}{6} \xi^3 + \frac{c_2}{2} \xi^2 + c_3 \xi + c_4 , \quad (5.117)$$

где c_i - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Так, для элемента с заземленными концами (рис.5.10 а) при смещении левого конца по вертикали на единицу граничные условия равны:

при $\xi = -1$ $w(\xi) = 1$; $w'(\xi) = 0$; при $\xi = 1$ $w(\xi) = 0$; $w'(\xi) = 0$.

В результате, функция прогибов запишется следующим образом

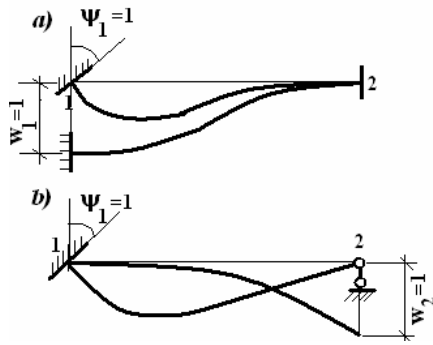


Рис.5.10. Граничные условия.

$$N_I(\xi) = \frac{\xi^3}{4} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}. \quad (5.118)$$

При повороте левого конца балки на угол, равный единице, граничные условия будут равны:

при $\xi = -1$ $w(\xi) = 0$; $w'(\xi) = 1$; при $\xi = 1$ $w(\xi) = 0$; $w'(\xi) = 0$. Соответствующая функция прогиба

$$\bar{N}_I(\xi) = \frac{a}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1). \quad (5.119)$$

Аналогично при единичных смещениях правого конца

$$N_2(\xi) = -\frac{\xi^3}{4} + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}; \quad \bar{N}_2(\xi) = \frac{a}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \quad (5.120)$$

Когда концы балки получают единичные перемещения в горизонтальном направлении, то перемещения нейтральной оси будут равны

$$N^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad N^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (5.121)$$

Использование нормализованных координат позволяет записать шесть функций (5.118)-(5.121) всего тремя формулами [2] для типового k -го узла

$$N^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi); \quad N_k(\xi) = -\xi_k \frac{\xi^3}{4} + \frac{3}{4}\xi_k \xi + \frac{1}{2}; \quad \bar{N}_k(\xi) = \frac{a}{4}(\xi^3 + \xi_k \xi^2 - \xi - \xi_k), \quad (5.122)$$

где $k=1,2$.

Первая из этих функций представляет интерполяционный полином Лагранжа первого порядка, вторая и третья – полиномы Эрмита (см. п. П.5).

Для балки, заземленной с одной стороны и шарнирно-опертой – с другой (рис.5.10б), интерполяционные функции для типового узла равны

$$N^{(k)}(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi_m \xi_k)(1 + \xi); \quad N_k(\xi) = \frac{\xi_k}{16}(-\xi^3 + 3\xi_m \xi^2 + 9\xi + 3\xi_m) + \frac{1}{2}; \quad (5.123)$$

$$\bar{N}_k(\xi) = \frac{a}{16}(1 - \xi_m \xi_k)(\xi^3 - 3\xi_m \xi^2 - \xi + 3\xi_m), \quad k=1,2.$$

Здесь ξ_{iu} - нормализованная координата шарнира, для шарнира слева $\xi_{iu}=-1$, для шарнира справа $\xi_{iu}=1$.

5.5.4. Совокупность интерполяционных функций дает возможность записать связь между узловыми параметрами и перемещениями в области элемента в виде

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & 0 & N^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & \bar{N}_1 & 0 & N_2 & \bar{N}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = [C]^{(1)}[C]^{(2)} \begin{Bmatrix} \{q\}_i^{(1)} \\ \{q\}_i^{(2)} \end{Bmatrix} = [C]\{q\}_i. \quad (5.124)$$

При этом типовой блок интерполяционной матрицы равен

$$[C]^{(k)} = \begin{bmatrix} N^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & N_k & \bar{N}_k \end{bmatrix}. \quad (5.125)$$

Теперь, учитывая (5.112), можно записать типовой блок матрицы деформаций в виде

$$[B]^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & N_k & \bar{N}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN^{(k)}}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2 N_k}{dx^2} & \frac{d^2 \bar{N}_k}{dx^2} \end{bmatrix}. \quad (5.126)$$

Матрица жесткости элемента блочная

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} \\ [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i2}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (5.127)$$

Типовой блок матрицы (5.127) получается по общей формуле (2.24) с учетом специфики интегрирования по длине элемента

$$[K]_{ij}^{(k)} = a \int_{-1}^1 ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} d\xi. \quad (5.128)$$

Подставляя в (5.128) соотношения (5.126) и матрицу $[D]$ из (5.114), выполнив матричное перемножение и интегрирование, получим типовой блок матрицы жесткости элемента с двумя защемленными концами

$$[K]_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & [K_c] & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad (5.129)$$

где

$$K_p = \frac{A}{a} \xi_j \xi_k \quad - \quad (5.130)$$

элемент матрицы жесткости, обусловленный растяжением-сжатием;

$$[K_c] = B \begin{bmatrix} \frac{3}{2a^3} \xi_j \xi_k & \frac{3}{2a^2} \xi_j \\ -\frac{3}{2a^2} \xi_k & \frac{1}{2a} (3 + \xi_j \xi_k) \end{bmatrix} \quad - \quad (5.131)$$

блок матрицы жесткости, обусловленный изгибом.

Типовой блок матрицы жесткости для стержня, жестко защемленного с одной и шарнирно опертой с другой стороны, также имеет вид (5.129), где

$$K_p = \frac{A}{a} \xi_j \xi_k,$$

$$[K_c] = B \begin{bmatrix} \frac{3}{8a^3} \xi_j \xi_k & -\frac{3}{8a^2} (1 - \xi_u \xi_j) \xi_k \\ -\frac{3}{8a^2} (1 - \xi_u \xi_k) \xi_j & \frac{1}{8a} (1 + \xi_u \xi_j)(1 + \xi_u \xi_k) \end{bmatrix}. \quad (5.132)$$

Интеграл (5.128) может быть вычислен в замкнутом виде только в случае постоянства жесткостей A , B и матрицы $[D]$ (5.114) в пределах элемента. Для

физически нелинейных задач, когда жесткости сечений меняются по длине, а также для стержня переменного сечения, необходимо использовать численное интегрирование (см. П.6)

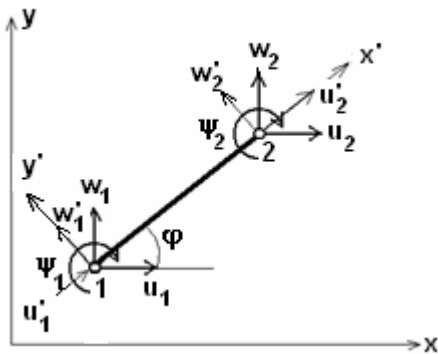


Рис.5.11. Стержень в общей системе координат

$$[K]_{ij}^{(k)} = a \sum_{i=1}^n H_i ([B]^{(j)})^T [D]_i [B]^{(k)}, \quad (5.133)$$

где H_i - весовые множители принятой квадратуры; n - число точек интегрирования вдоль длины элемента.

Имея в виду степень полинома

(5.117), число точек интегрирование должно быть не менее четырех.

5.5.5. Пусть на i -ый элемент с узлами 1, 2 действует, кроме сосредоточенных узловых сил, распределенная внешняя нагрузка: продольная интенсивностью $p_1(\xi)$ и поперечная интенсивностью $p_2(\xi)$, которые образуют вектор распределенной нагрузки $\{p_s\}_i = \{p_1(\xi) \quad p_2(\xi)\}$. Эквивалентную узловую нагрузку представим вектором $\{P_S\}_i^{(k)} = \{P_1^{(k)} \quad P_2^{(k)} \quad M^{(k)}\}$. Эту узловую нагрузку можно вычислить по общей формуле (2.29)

$$\{P_S\}_i^{(k)} = a \int_{-1}^1 ([C]^{(k)})^T \{p_s\} d\xi. \quad (5.134)$$

5.5.6. Матрицы для стержневого элемента получены в местной системе координат x', y' (рис.5.11). Их преобразование в общую систему координат осуществляется по общим правилам п.2.3.5. Введя в рассмотрение матрицу направляющих косинусов

$$[m] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.135)$$

вектор перемещений k -го узла в общих координатах будет имеет вид

$$\begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} = [m] \begin{Bmatrix} u'_k \\ w'_k \\ \psi_k \end{Bmatrix}, \quad (5.136)$$

а типовой блок матрицы жесткости равен

$$[K]_{ij}^{(k)} = [m]^T [K']_{ij}^{(k)} [m]. \quad (5.137)$$

Здесь штрихом отмечены характеристики в местной системе координат.

5.5.7. Располагая матрицей жесткости для плоского элемента (5.128), несложно получить матрицу жесткости и для пространственного стержневого элемента.

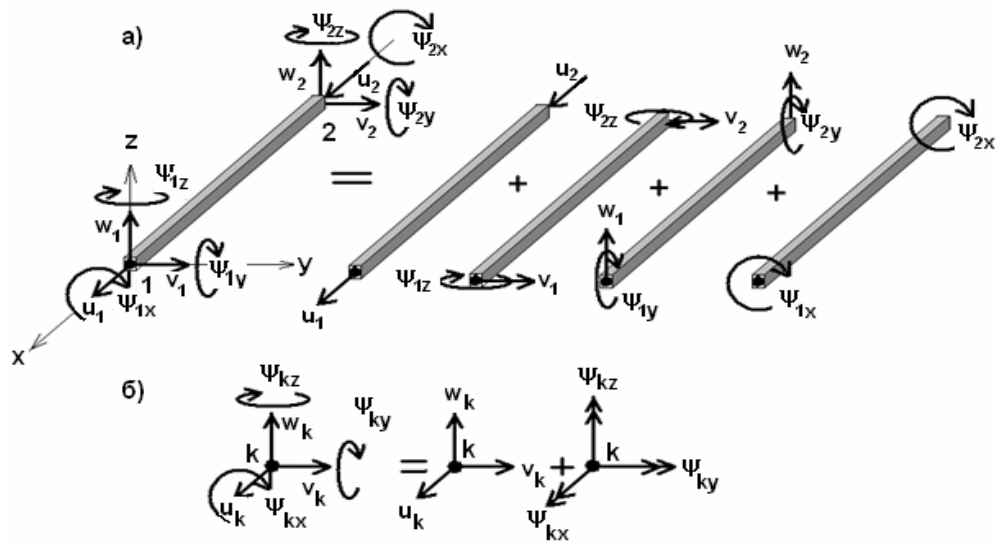


Рис.5.12. Конечный элемент пространственного стержня.

Рассмотрим i -ый конечный элемент изгибаемого стержня длиной $2a$, расположенного в пространстве таким образом, что его нейтральная ось направлена вдоль оси x , а оси y и z - вдоль главных осей сечения (рис.5.12). Внешняя нагрузка также приводится к плоскостям xOz и yOz . Узловые параметры такого элемента представлены шестью компонентами, три из которых – перемещения вдоль координатных осей, три – углы поворота относительно тех же осей. Из рис.5.12а видно, что их можно разложить на составляющие, определяющие растяжение-сжатие стержня, изгиб в плоскости xOy и xOz , кручение вокруг оси x

$$\{q^i\}_i^{(k)} = \{u_k \{v_k \psi_{kz}\} \{w_k \psi_{ky}\} \psi_{kx}\} = \{u_k \{q\}_x^{(k)} \{q\}_y^{(k)} \psi_{kx}\},$$

а типовой блок матрицы жесткости, размером 6×6 , представить в квазидиагональном виде

$$[K^i]_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} K_p & & & & & \\ & [K_c]_z & & & & \\ & & [K_c]_y & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & & \\ & & & & & K_{kp} \end{bmatrix}. \quad (5.138)$$

Здесь, например, для стержня с одним защемленным с другим шарнирным концом

$$K_p = \frac{A}{a} \xi_j \xi_k ; [K_c]_z = B_z \begin{bmatrix} \frac{3}{8a^3} \xi_j \xi_k & -\frac{3}{8a^2} (1 - \xi_u \xi_j) \xi_k \\ -\frac{3}{8a^2} (1 - \xi_u \xi_k) \xi_j & \frac{1}{8a} (1 + \xi_u \xi_j) (1 + \xi_u \xi_k) \end{bmatrix} ;$$

$$[K_c]_y = B_y \begin{bmatrix} \frac{3}{8a^3} \xi_j \xi_k & -\frac{3}{8a^2} (1 - \xi_u \xi_j) \xi_k \\ -\frac{3}{8a^2} (1 - \xi_u \xi_k) \xi_j & \frac{1}{8a} (1 + \xi_u \xi_j) (1 + \xi_u \xi_k) \end{bmatrix} ; K_{kp} = \frac{C}{a} \xi_j \xi_k ,$$

здесь $C = \int_F G \sqrt{y^2 + z^2} dF$; G – модуль сдвига. Для упругого изотропного материала

$C = GJ_k$, где J_k – момент инерции сечения при кручении. Жесткости сечений на изгиб в различных плоскостях определяются по формуле (5.113), где в подынтегральном выражении переменная z может принимать значения z и y соответственно.

Зачастую направление местных осей для стержня не совпадает с направлением общей системы координат. Перед преобразованием координат целесообразно выполнить перестановку компонент вектора $\{q'\}_i^{(k)}$, образовав новый вектор $\{q\}_i^{(k)}$. Между этими двумя векторами существует зависимость

$$\{q'\}_i^{(k)} = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ \psi_{kz} \\ w_{kx} \\ \psi_{ky} \\ \psi_{kx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \psi_{kx} \\ \psi_{ky} \\ \psi_{kz} \end{Bmatrix} = [H] \{q\}_i^{(k)} . \quad (5.139)$$

Преобразование вектора узловых перемещений по (5.139) позволяет их разделить на две группы, одна из которых связана с линейными перемещениями, другая – с углами поворотов, Векторное представление этих групп, показанное на рис. 5.12, свидетельствует о том, что их преобразование должно выполняться однотипно с помощью одной и той же матрицы направляющих косинусов $[m]$ (5.99). В целом же, для всех узловых параметров преобразование координат будут осуществляться с помощью квазидиагональной матрицы (5.100)

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & 0 \\ 0 & [m] \end{bmatrix} . \quad (5.140)$$

Теперь, учитывая (5.139) и (5.40), нетрудно получить выражение для матрицы жесткости стержня в общей системе координат

$$[K]_{ij}^{(k)} = [M]^T [H]^T [K']_{ij}^{(k)} [H][M]. \quad (5.141)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айронс В.М., Дрейнер К.И. Несоответствие узловых связей при расчете изгиба пластин методом жесткостей// Ракетная техника и космонавтика. – 1965. - № 5.
2. Бидный Г.Р., Колчин Г.Б., Клованич С.Ф. Матричный метод решения задач строительной механики. – Кишинев: Штиинца, 1980. – 307 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
4. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред. – М.: Недра, 1974. – 240 с.
5. Клованич С.Ф. «Concord». Программный комплекс решения геотехнических задач методом конечных элементов. Руководство пользователя. – Одесса, 2003. – 63 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. : Наука, 1968. – 720 с.
7. Метод конечных элементов в механике твердых тел/ под. ред. Сахарова А.С., Альтенбаха И. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с.
8. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: Изд-во «Сталь», 2002. – 600 с.
9. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.:Судостроение, 1974.- 342 с.
10. Рейсснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек. – В кн.: Упругие оболочки. – М. – Из-во иностранной литературы, 1962.
11. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М: Наука, 1966. – 635 с.
12. Bazeley G.P., Cheung Y.K., Irons V.M., Zienkiewicz O.C. Triangular Elements in Bending – Conforming and Nonconforming Solutions// Proc.Conf. “Matrix Methods in Struct. Mech.” –Ohio: Air Force Inst. Of Techn., Write Patterson A.F.Base, Oct. ,1965.

13. Bell K. A Refined Triangular Plate Bending Element// Int. J. Num.Mech.Eng. -1969.- №1. – P. 101-122.
14. Bogner F.K. Fox R.L., Schmidt L.A. The Generation of Interelement-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of the Interpolation Formula// Proc.Conf. “Matrix Methods in Struct. Mech.” –Ohio: Air Force Inst. Of Techn., Write Patterson A.F.Base, Oct. ,1965.
15. Butlin G.A., Ford R. Compatible Plate Bending Element. – Univ.of Leicester, Eng.Dep., 1968
16. Smith I.M., Duncan W. The Effectiveness of Nodal Continuities in Finite Element Analysis of Thin Rectangular and Skew Plates in Bending// Int. J. “Num. Mech. Eng.”. - № 2. – 1970. – P.253-258.

ГЛАВА 10

ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ

10.1. Плосконапряженные железобетонные конструкции

10.1.1. В качестве тестовых примеров рассмотрим расчет статически определимых железобетонных балок прямоугольного сечения без поперечного армирования и с поперечным армированием [4]. Выбор такой конструкции как тестовых обусловлен, с одной стороны, тем, что они представляют наиболее обширный класс железобетонных конструкций, с другой, тем, что их расчет может быть осуществлен по наиболее обоснованной стандартной методике, изложенной в нормативных документах [11]. В то же время, расчет по действующим нормам может быть осуществлен лишь на отдельных характерных стадиях работы балок. Результаты расчетов именно на этих стадиях могут служить для тестирования разработанной модели и метода расчета. В данных расчетах принята ассоциированная теория течения бетона, описанная в п.7.2.

Геометрические размеры и армирование балок приведены на рис.10.1. Балки изготовлены из обычного тяжелого бетона на портландцементе. В качестве исходных данных приняты следующие характеристики бетона (соответствующие нормативным значениям для бетона класса В25): $R_b = 18.5$ МПа, $R_{bt} = 1.6$ МПа, $E_b = 3 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.2$, $\varepsilon_u = 0.0025$, $\varepsilon_{ult} = 0.0002$. Продольное армирование осуществлено из арматуры класса А-IV с $R_s = 590$ МПа и $E_s = 1.9 \cdot 10^5$ МПа, а

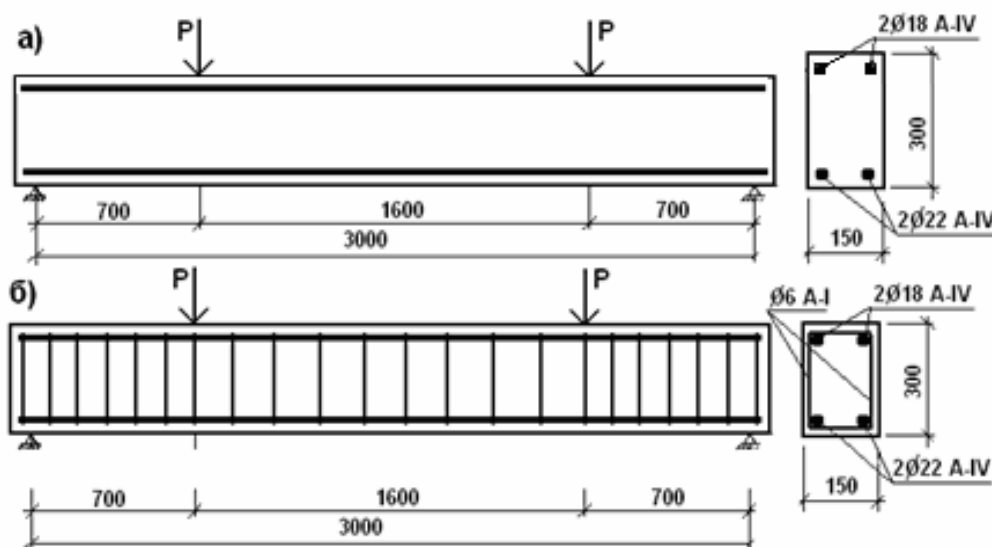


Рис.10.1. Конструкция железобетонных балок прямоугольного сечения:
а) – без поперечного армирования; б) – с поперечным армированием

поперечное армирование (хомуты) из арматуры класса А-I с $R_s = 235$ МПа, $E_s = 2.1 \cdot 10^5$ МПа. Нагрузка прикладывалась симметрично в виде сосредоточенных сил на расстоянии 700 мм от опор.

Результаты расчета балок по методике [11]: высота сжатой зоны $x = 160$ мм. Разрушающая нагрузка $P_{max} = 120$ кН. Нагрузка трещинообразования $P_{crc} = 14$ кН. Напряжение в арматуре в момент трещинообразования – 19.5 МПа. Прогиб к моменту разрушения 7 мм. Разрушение балок: без поперечной арматуры – по наклонному сечению, с поперечной арматурой – по нормальному сечению.

Эти же балки рассчитывались методом конечных элементов с использованием плоских четырехузловых изопараметрических элементов, а также элементов-вставок в виде сосредоточенных стержней, описанных в разд. 8.2.3, 8.2.4. Расчетная схема представлена на рис.10.2. В силу геометрической симметрии осуществлялся расчет половины балки.

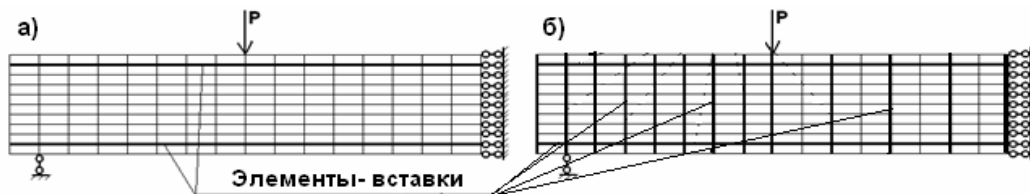


Рис.10.2. Расчетная схема балок: а) без поперечного армирования; б) с поперечным армированием

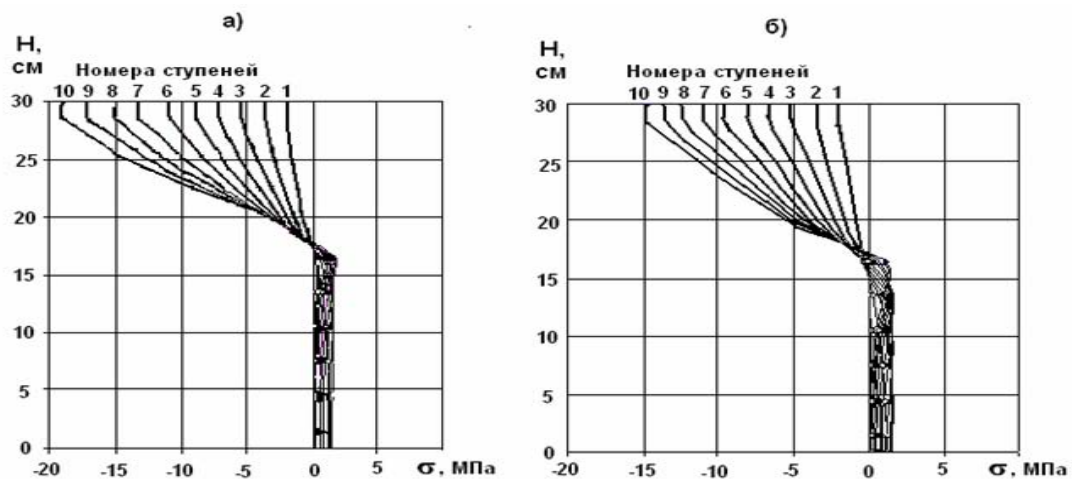


Рис.10.3. Эпюры нормальных напряжений в балках: а) - без поперечного армирования; б) - с поперечным армированием

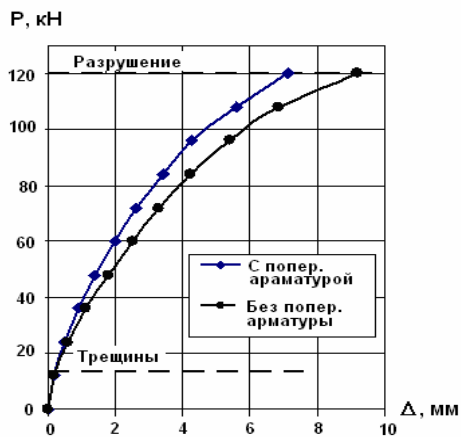


Рис.10.4 Прогибы середины пролета.

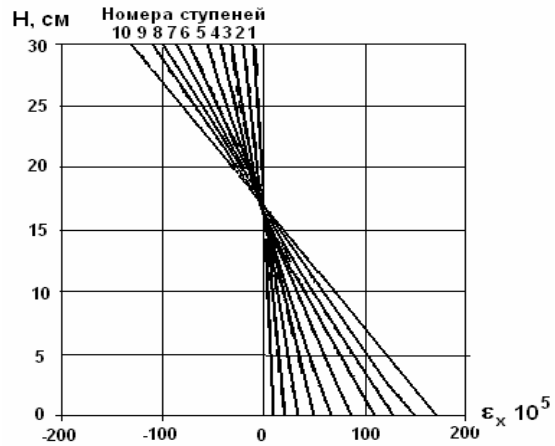


Рис.10.5. Изменение деформаций по высоте

Нагружение производилось ступенями по $\Delta P = 1.2$ кН. (всего 100 ступеней). Разрушающая нагрузка $P = 120$ кН. Результаты расчетов по МКЭ приведены на рис.10.3-10.6.

На рис.10.5 приведен график изменения деформаций по высоте сечения. Из графика видно, что гипотеза плоских сечений соблюдается при любом уровне нагрузки.

Из сопоставления результатов полученных по МКЭ и по [11] видно, что в обоих случаях первые нормальные трещины появились в растянутой зоне в середине пролета балки при нагрузке $P = 14.4$ кН (12-я ступень нагружения). Максимальное напряжение в момент трещинообразования $\sigma_x = 3.35$ МПа. Аналогично для балки без поперечного армирования $P = 15.6$ кН (13-я ступень) и напряжение в момент трещинообразования $\sigma_x = 2.97$ МПа.

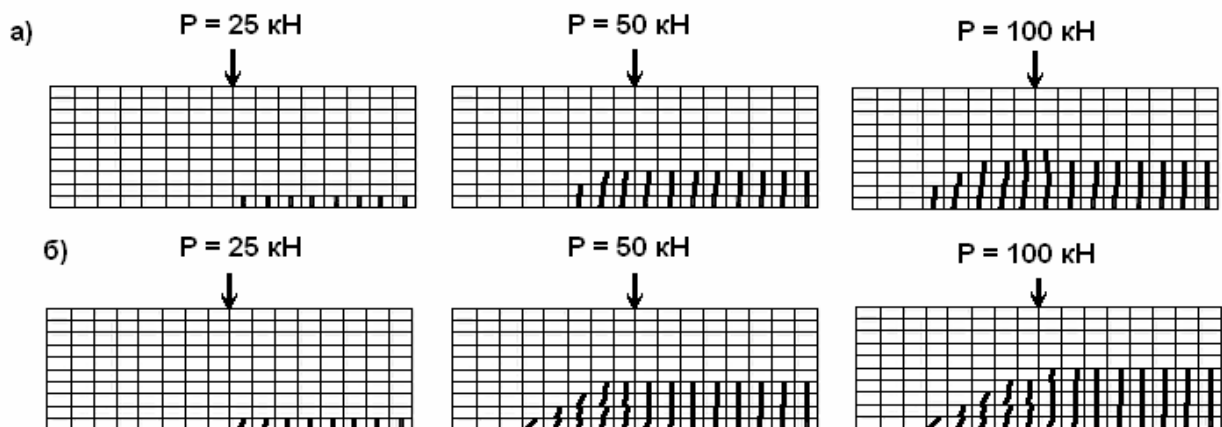


Рис.10.6. Трещинообразование в балках: а) без поперечного армирования; б) с поперечным армированием

Для наглядности, процесс трещинообразования, а также изменения нормальных напряжений по высоте сечения представлены на рис.10.6 и рис.10.3. Изменение прогибов балок без поперечного армирования и с поперечным армированием по ступеням нагружения показано на рис.10.4.

Таким образом, анализ полученных данных показывает, что с помощью предлагаемого метода можно проследить за трещиностойкостью и жесткостью железобетонных балок на всех этапах нагружения.

В целом наблюдаются достаточно удовлетворительные совпадения данных расчетов по МКЭ и по [11].

10.1.2. Рассматривается расчет предварительно напряженной железобетонной балки прямоугольного сечения, работа которой изучалась экспериментально в НИИЖБ [4]. Геометрические размеры балки и ее армирование показаны на рис.10.7. Использовались плоские 4-х узловые прямоугольные изопараметрические элементы и линейные элементы-вставки, моделирующие работу арматуры рис.10.8. Нагрузка на балку прикладывалась симметрично в виде сосредоточенных сил ступенями (всего 20 ступеней) аналогично опытным. На первой ступени прикладывалась горизонтальная нагрузка, моделирующая предварительное напряжение. Значения горизонтальных сил показаны на рис.10.7. Начиная со второй ступени, нагружение осуществлялось вертикальными силами по $\Delta P = 5$ кН.

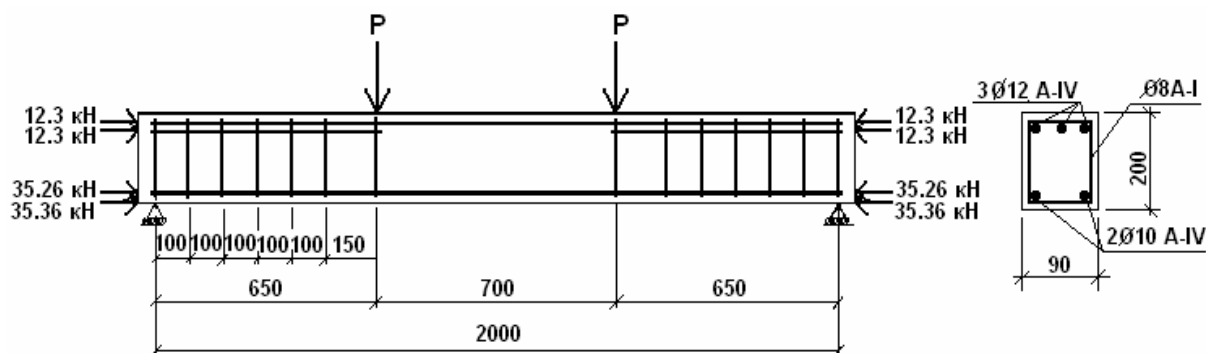


Рис.10.7. Предварительно напряженная балка

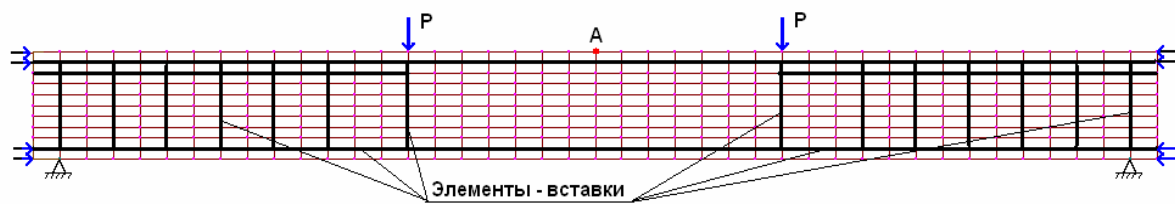


Рис.10.8. Расчетная схема балки

Исходные характеристики материалов соответствовали опытным значениям и принимались равными бетон – $R_b = 43.5$ МПа, $R_{bt} = 2.5$ МПа, $E_b = 3.6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.2$, $\epsilon_{ui} = 0.002$, $\epsilon_{ult} = 0.00014$, арматура $R_s = 400$ МПа, $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа.

По результатам расчетов определены прогибы в середине пролета балки рис.10.10, построены эпюры нормальных напряжений по высоте сечения балки

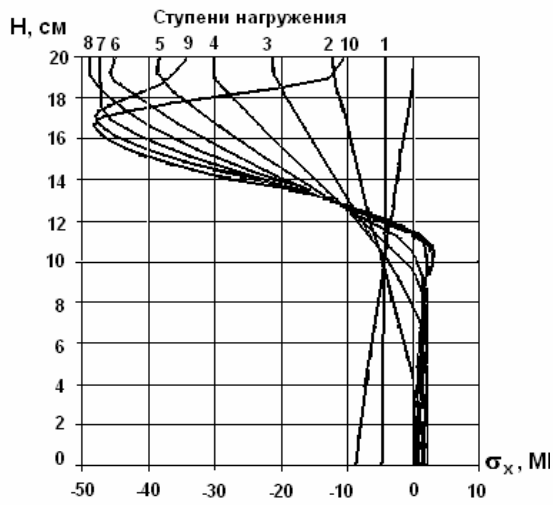


Рис.10.9 Эпюры нормальных напряжений

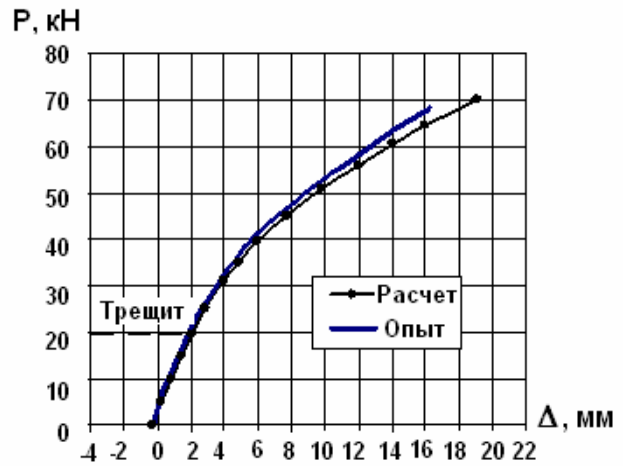


Рис.10.10. Вертикальные перемещения точки А

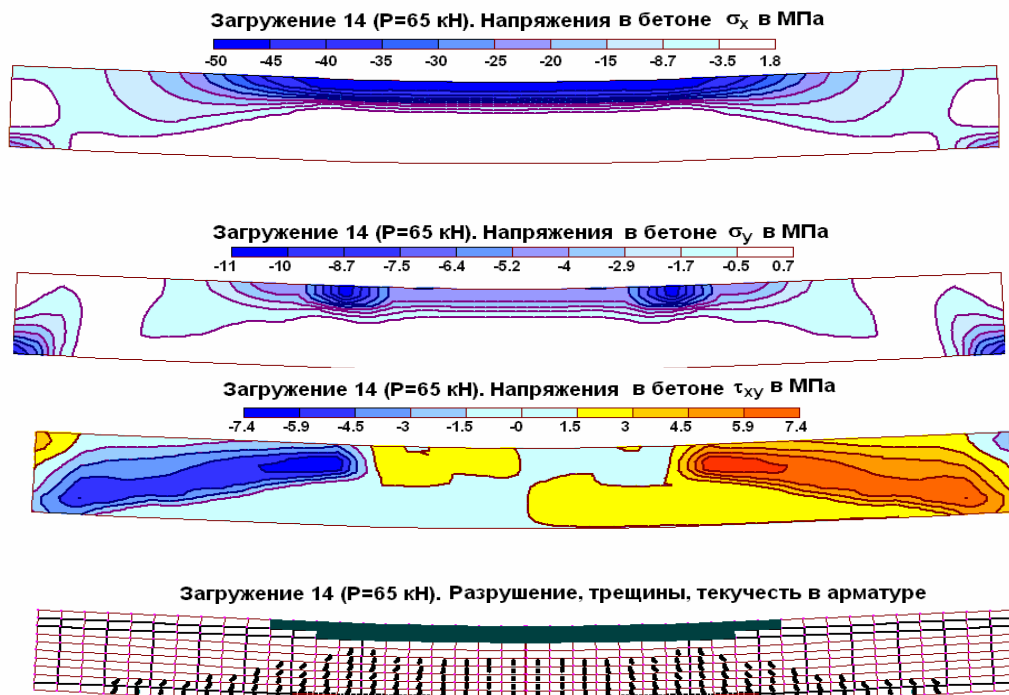


Рис.10.11. Разрушение, трещины, текучесть в арматуре

(рис.10.9), показан процесс трещинообразования, изополя напряжений в бетоне и усилия в арматуре на характерных ступенях нагружения балки (рис.10.11).

По результатам расчетов прослеживается соблюдение гипотезы плоских сечений, приближение очертания эпюр нормальных напряжений в сжатом бетоне к параболическим, уменьшение высоты сжатой зоны бетона с увеличением напряжений.

Первые трещины появились при нагрузке $P = 10$ кН (3 ступень нагружения) с напряжением в бетоне в момент трещинообразования $\sigma_x = 8.8$ МПа. Разрушение наступило при $P = 65$ кН (14 ступень нагружения – течение арматуры) с напряжением в сжатом бетоне в момент разрушения $\sigma_x = 43.1$ МПа, прогиб к моменту разрушения составил 13 мм.

Эти результаты хорошо согласуются с результатами, полученными при испытаниях.

10.1.3. С использованием модели бетона, описанной в п.7.2. и элементов-вставок в виде стержней, описанных в пп. 8.2.3, 8.2.4, по программе «Concord» был осуществлен расчет железобетонной рамы, работа которой изучалась экспериментально в НИИЖБе Госстроя СССР [4].

Конструкция опытного образца и его расчетная схема в виде четырехузловых изопараметрических элементов и линейных элементов-вставок показаны на рис.10.12.

Опытные и расчетные исходные характеристики материалов, из которых были изготовлена рама: бетон - $R_b = 43$ МПа, $R_{bt} = 2.5$ МПа, $E_b = 4.5 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.2$, предельные деформации сжатия - $\varepsilon_{ui} = 0.002$, предельные деформации растяжения - $\varepsilon_{ut} = 0.0001$, продольная арматура класса А-III с $R_s = 400$ МПа, $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа, поперечная арматура класса А-I с $R_s = 240$ МПа, $E_s = 2.1 \cdot 10^5$ МПа.

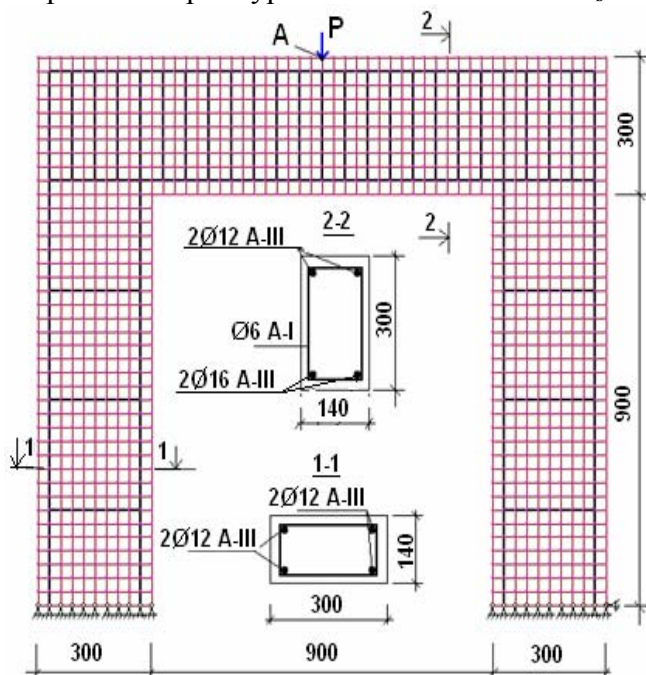


Рис.10.12. Расчетная схема рамы

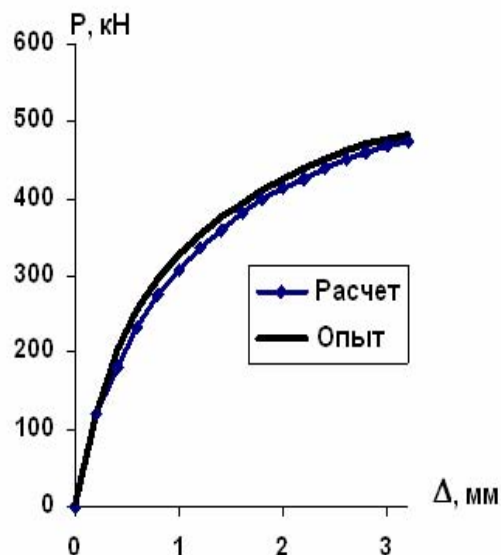


Рис.10.13. Вертикальные перемещения точки А

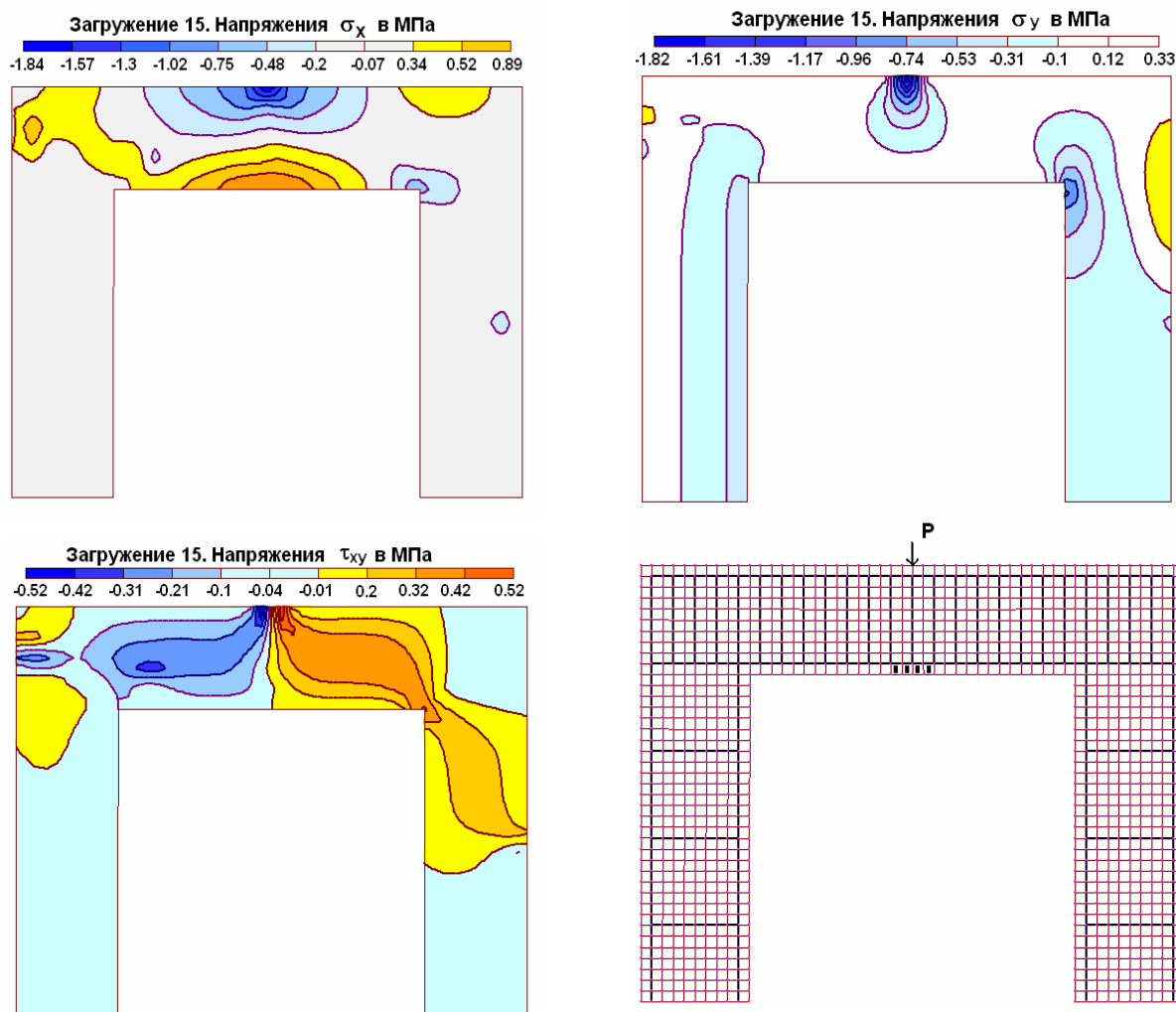


Рис.10.14. Напряжения и трещины на 15 ступени

Нагрузка прикладывалась ступенями по $\Delta P = 15$ кН в середине пролета ригеля вплоть до значения, равного 300 кН. Результаты расчетов – процесс трещинообразования, изополя напряжений в бетоне, продольные усилия в арматуре на различных ступенях нагружения, перемещение центральной точки А показаны на рис.10.13-10.15. Наблюдается достаточно хорошее совпадение результатов расчетов МКЭ с опытными данными.

Анализируя данные вышеприведенных расчетов, можно сделать вывод, что предлагаемая методика расчета для конструкций данного типа дает достаточно надежные результаты и может быть использована в их реальном проектировании

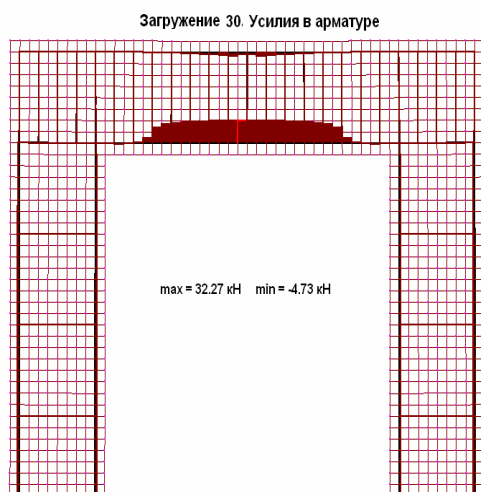
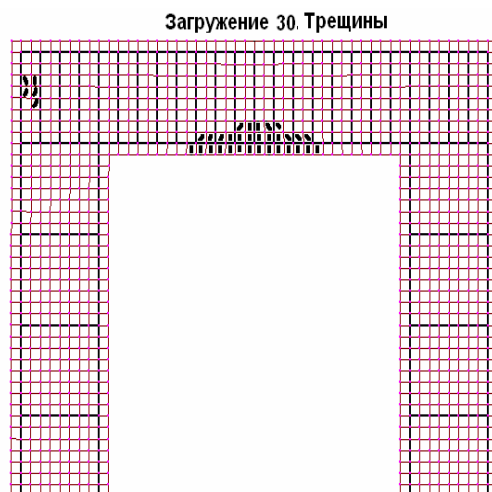
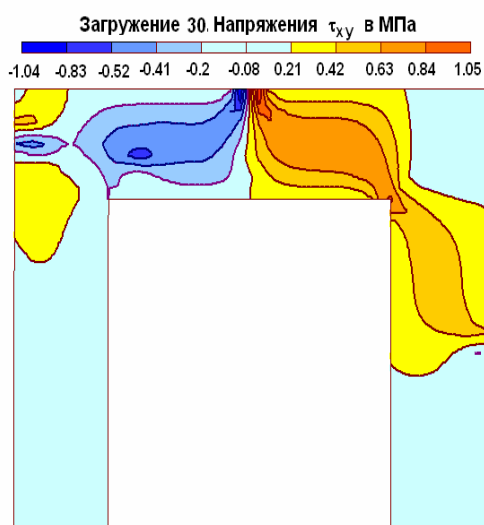
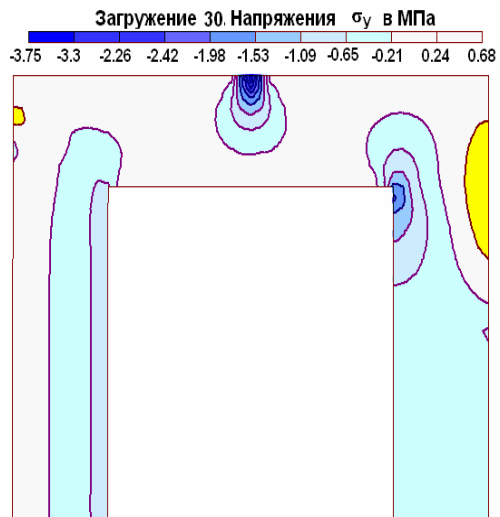
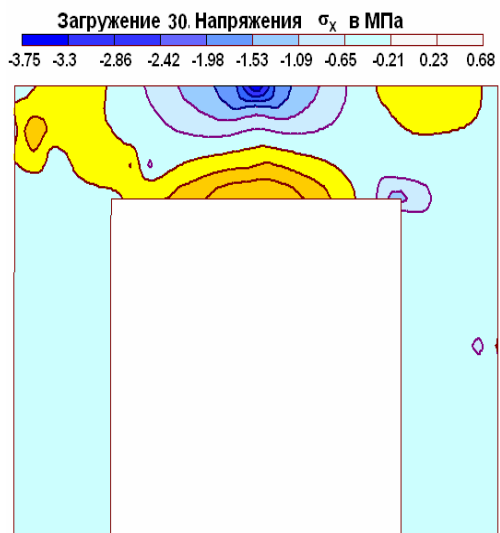


Рис.10.15. Напряжения в бетоне, трещинообразование и усилия в арматуре на 30 степени

10.1.4. В следующем примере рассматривается расчет железобетонной балки прямоугольного сечения при длительном нагружении постоянной нагрузкой $P=20$ кН (рис.10.16) по деформационной модели бетона, описанной в п.7.4.4, использующей

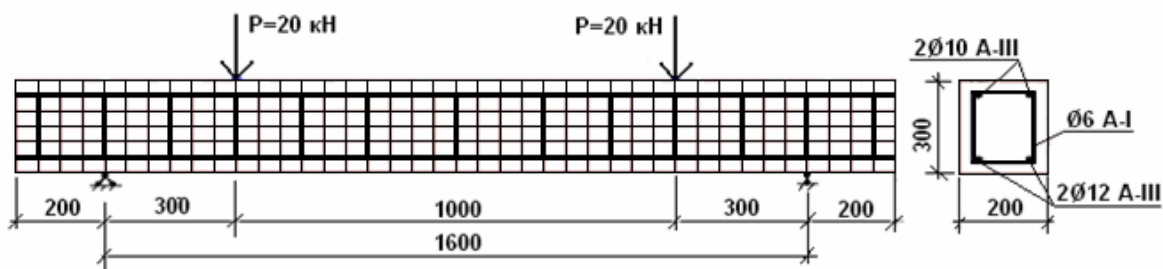


Рис.10.16. Расчетная схема балки.

методику диаграмм-изохрон. Характеристики бетона: $R_b=20$ МПа, $R_{bt}=2$ МПа, $E_b=20000$ МПа, $\varepsilon_u=0.002$, $\varepsilon_{ut}=0.00015$. Арматура моделировалась стержневыми элементами: продольная из стали класса А-IV, поперечная – из стали класса А-I. Для выбранных моментов времени выполнялся итерационный процесс до выполнения критерия сходимости. Результаты расчета прогибов балки представлены на рис.10.17. На рис.10.18 изображен график изменения напряжений в растянутой арматуре. Напряженное состояние бетона в моменты времени $t=0$ и $t=1000$ сут. представлено на рис.10.19.

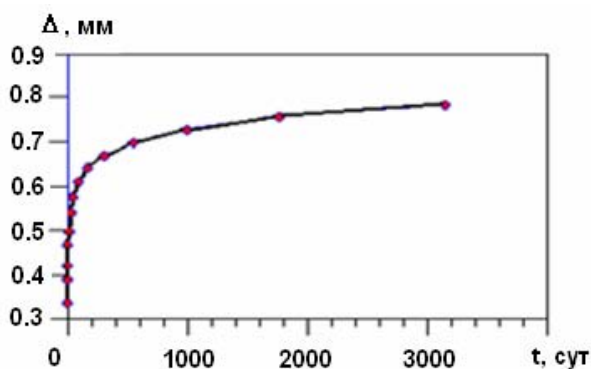


Рис.10.17. Прогибы балки

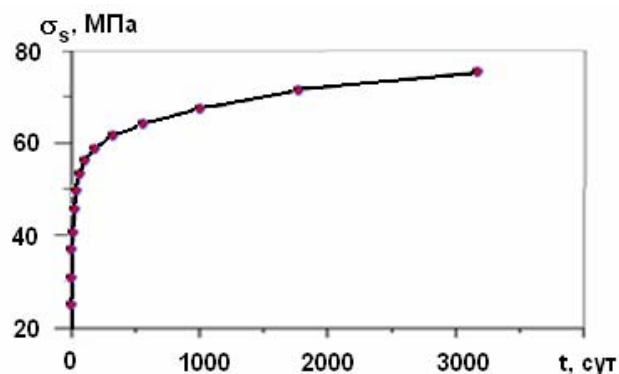


Рис.10.18. Напряжения в арматуре

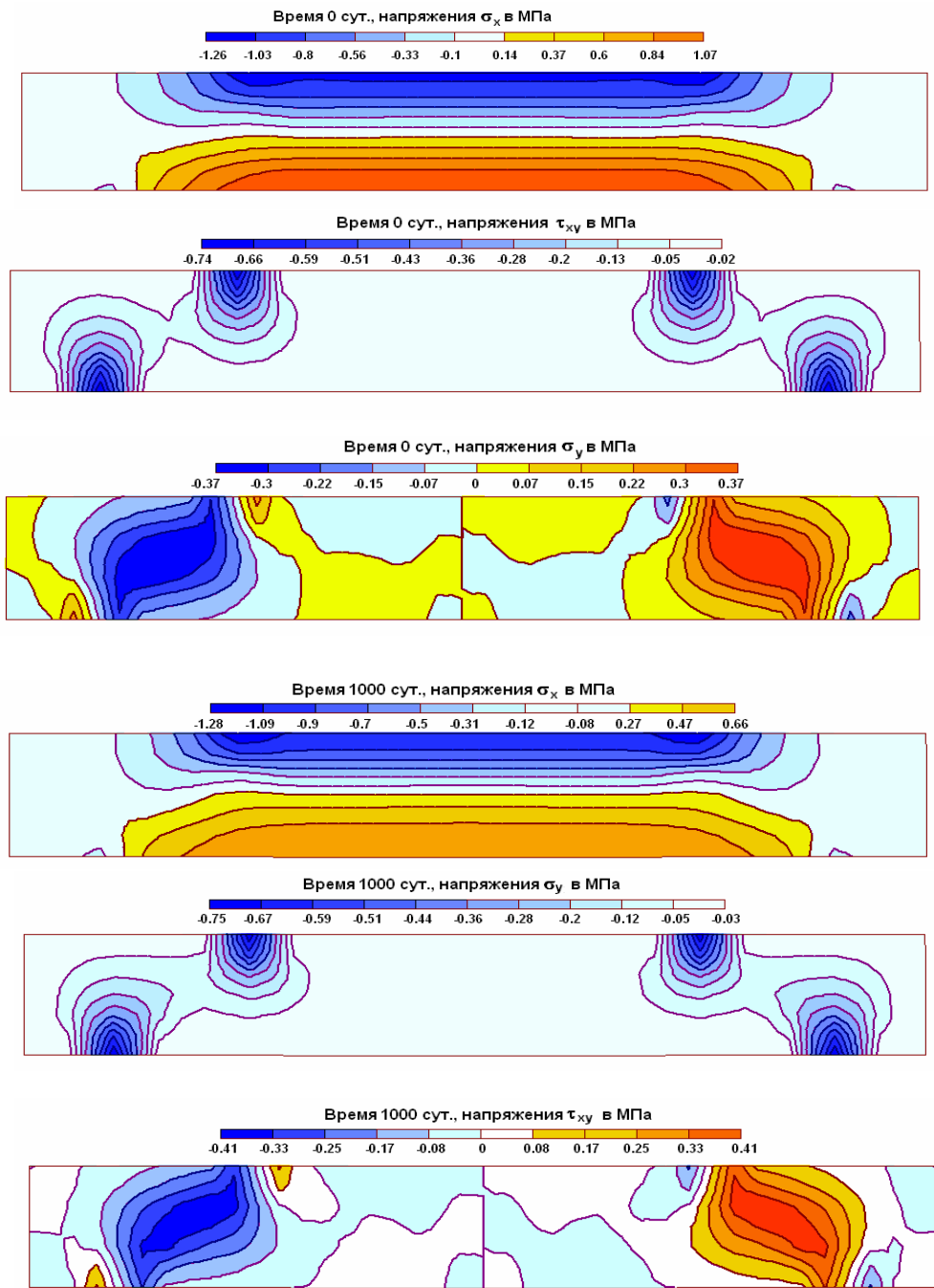


Рис.10.19. Напряжения в бетоне при $t=0$ и $t=1000$ сут

10.2. Пространственные конструкции, плиты оболочки

10.2.1. Так же как и в примере, приведенном в п.10.1.1, рассчитывалась балка с одиночным армированием без поперечной арматуры и с ней, однако в объемной постановке с использованием модели деформирования бетона и железобетона, рассматриваемой в гл. 6. Результаты расчетов по МКЭ сопоставлялись с результатами расчетов по СНиП [11]. Геометрические размеры балки приведены на рис.10.20. Здесь же приведена расчетная схема в виде совокупности восьмиузловых объемных элементов. В силу симметрии системы осуществлялся расчет только половины балки. Приняты следующие характеристики материалов. Бетон: призматическая прочность $R_b=20$ МПа, прочность на растяжение $R_{bt} = 1.75$ МПа, модуль упругости $E_b = 30000$ МПа,

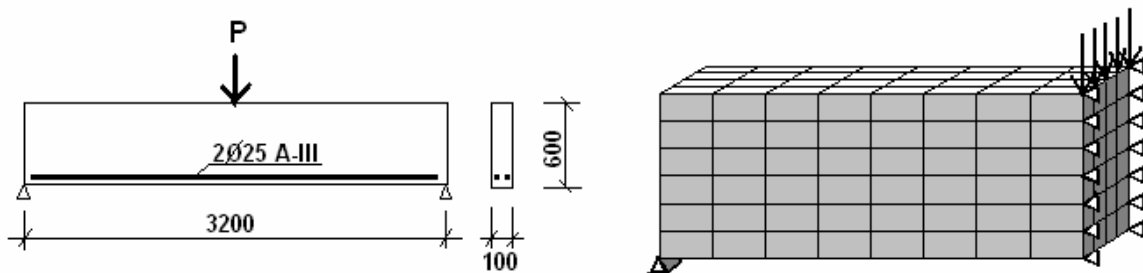


Рис.10.20. Балка с одиночным армированием

предельная сжимаемость $\varepsilon_u=0.002$, предельная растяжимость $\varepsilon_{ut}=0.0001$, коэффициент Пуассона $\nu=0.2$. Арматура: модуль упругости $E_s=200000$ МПа, $R_s=400$ МПа. Нагружение осуществлялось ступенями по $\Delta P=10$ кН. Рассчитывались две балки - без поперечного армирования и с поперечным армированием 0.5%.

Предварительные расчеты по СНиП: высота сжатой зоны $x=20$ см, разрушающая нагрузка $P_{пред}=200$ кН, нагрузка трещинообразования $P_{cre}=36$ кН.

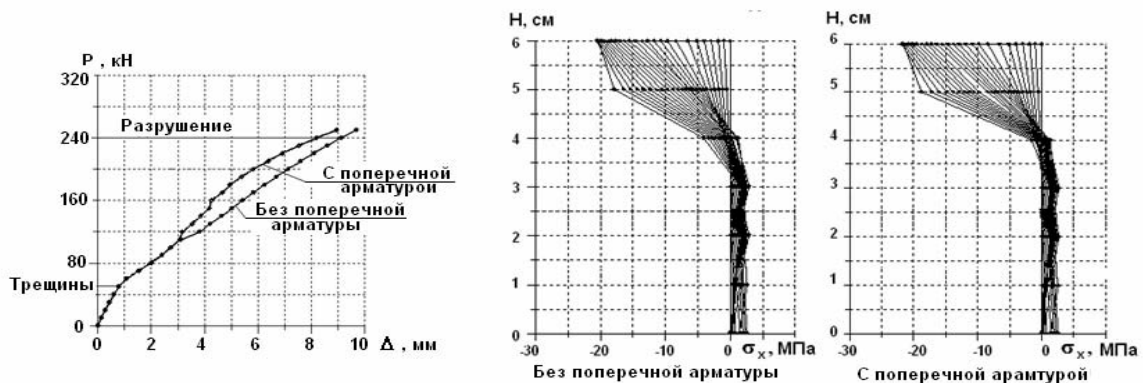


Рис.10.21. Прогибы балки и нормальные напряжения в бетоне в момент разрушения



Рис.10.22. Трещинообразование

Напряжение в арматуре в момент трещинообразования - 23.3 МПа. Прогиб к моменту разрушения - 9.3 мм. Разрушение балок: без поперечной арматуры - по наклонному сечению, с поперечной арматурой - по нормальному сечению.

Результаты расчетов по МКЭ представлены на рис. 10-21, 10-22.

10.2.2. Осуществлялся расчет серии балок прямоугольного сечения двух типов Б2-10 и Б2-8 на кручение с изгибом из опытов НИИЖБа [9,13] с использованием модели деформирования бетона и железобетона, рассмотренной в гл. 6. Геометрические размеры балок и схемы их армирования представлены на рис.10.23. На рис.10.24 дана расчетная схема в виде совокупности 8-ми узловых объемных элементов, а также показаны характерные сечения балок с закрепленными узлами и узлами приложения внешних нагрузок. Расчетные характеристики бетона балок, соответствующие опытным данным, приведены в следующей табл. 10.1. Для арматуры приняты следующие характеристики: $E_s = 2 \times 10^5$ МПа; $R_s = 400$ МПа. Нагружение балок осуществлялось ступенями. При этом балка Б2-10к испытывалась и рассчитывалась только на воздействие кручения. Величина ступени $\Delta M_{кр} = 0.8$ кН*м. Балка Б2-10 и Б2-8-04 дополнительно загружалась двумя вертикальными сосредоточенными силами из расчета $M_{кр}/M_{из} = 0.4$. Величина ступени $\Delta P = 3.64$ кН. Для балки Б2-8-02 $M_{кр}/M_{из} = 0.2$, соответственно и $\Delta P = 7.27$ кН. Результаты расчетов балок и сопоставление с опытными данными представлены на рис.10.25, 10.26.

Характеристики бетона

Таблица 10.1

Характеристика	Б2-10, Б2-10к	Б2-8-04	Б2-8-02
Призменная прочность в МПа	20.40	28.50	7.50
Прочность на растяжение, МПа	1.70	1.57	0.66
Модуль упругости, МПа	3.125×10^4	3.8×10^4	2.1×10^4
Коэффициент Пуассона	0.2	0.2	0.2
Пред.деформации сжатия	2×10^{-3}	2×10^{-3}	1×10^{-3}
Пред.деформации растяжения	1×10^{-4}	0.83×10^{-4}	0.63×10^{-4}

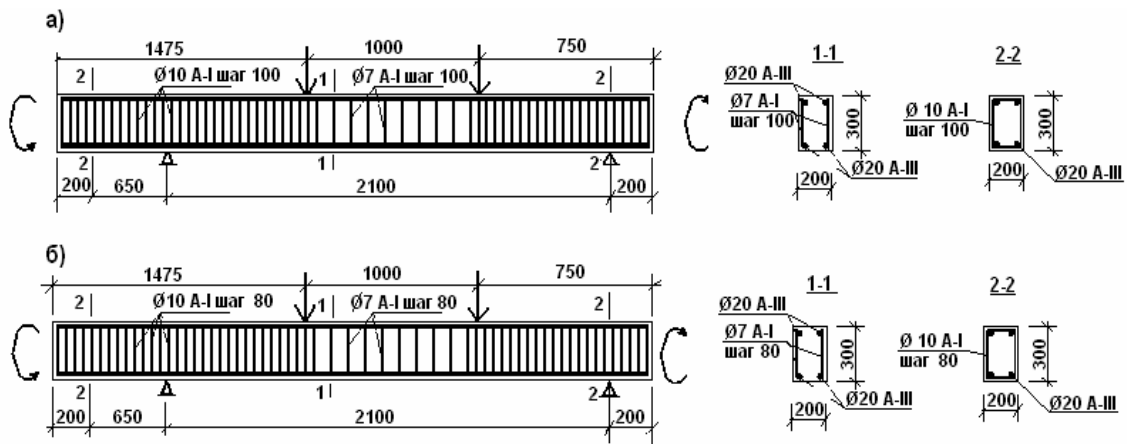


Рис.10.23. Опытные образцы балок: а) Б2-10 и б) Б2-8

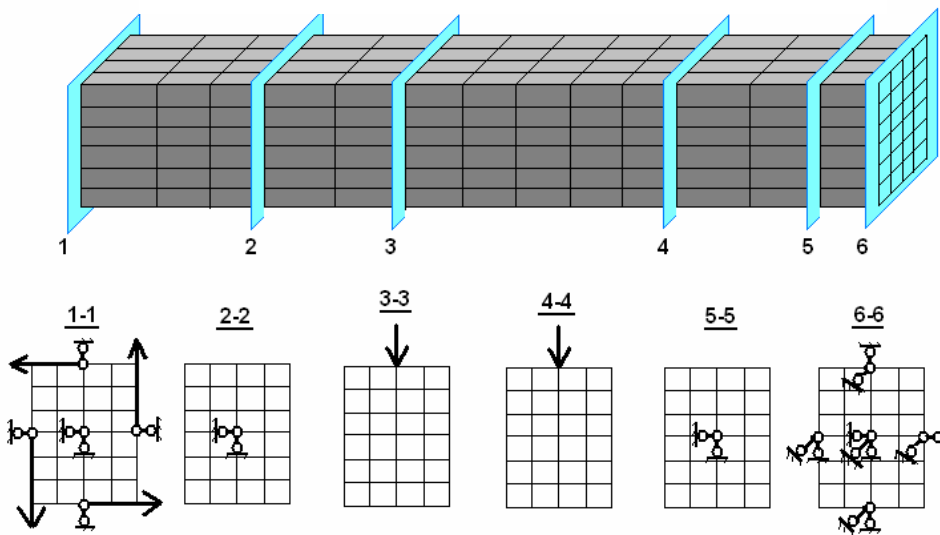


Рис.10.24. Расчетная схема и характерные сечения

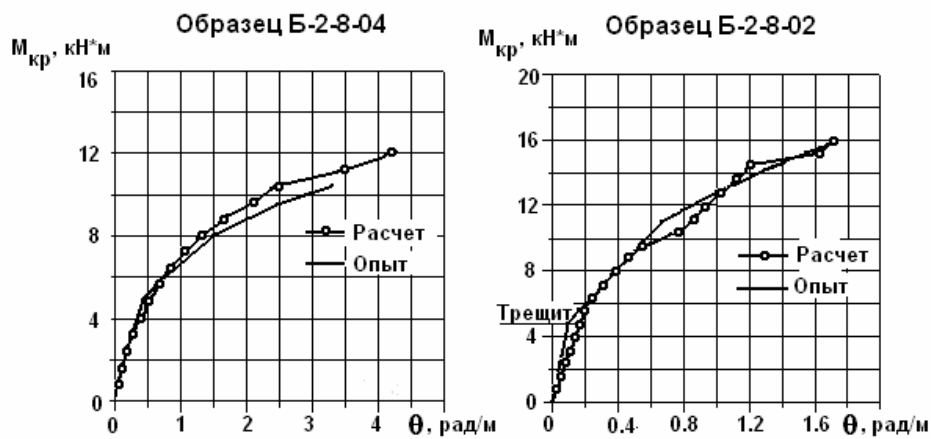


Рис.10.25. Углы закручивания балок Б2-8

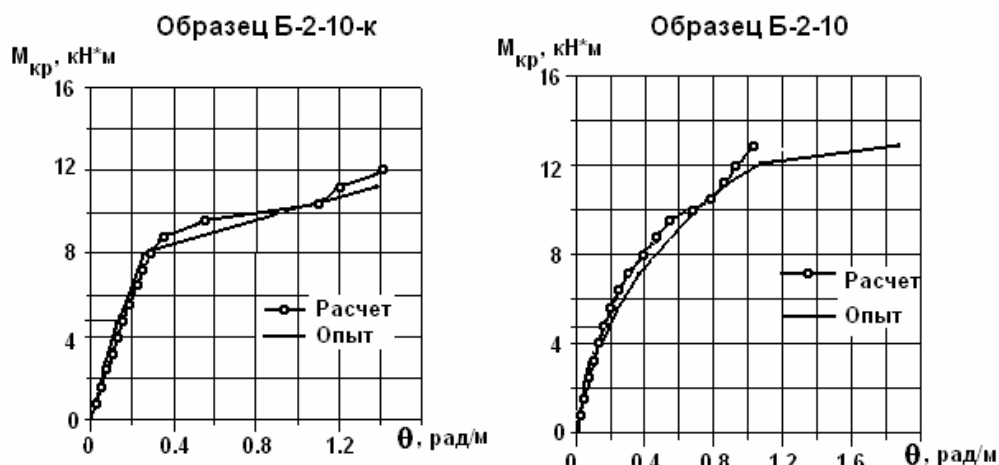


Рис.10.26. Углы закручивания балок В2-10

10.2.3. Рассмотрим расчет балки-стенки W2 [6], экспериментальные данные по которой имеются в работе [15]. Геометрические размеры балки-стенки и схема ее армирования представлены на рис.10.27. Характеристики бетона: $R_b=16$ МПа, $R_{bt}=2$ МПа, $E_b=20000$ МПа, $\nu=0.2$. Характеристики арматуры: $\varnothing 5$ $R_s=353$ МПа, $E_s=188230$ МПа. Балка-стенка моделируется объемными изопараметрическими 8-ми узловыми элементами. Для передачи нагрузки используется абсолютно жесткая пластина, к которой приложена нагрузка P ступенями по 0.5 кН. Расчетная схема балки-стенки изображена на рис.10.28. Расчет велся с использованием изотропной модели (п.7.4). На рис.10.29 показаны изолинии нормальных напряжений σ_x в балке-стенке на 23 ступени, а также даны графики изменения этих же напряжений в бетоне по ступеням нагружений в элементах сжатой и растянутой зон. Касательные напряжения приведены на рис.10.30. На рис.10.31 показаны изолинии вертикальных перемещений на 20 ступени нагружения, а также график прогибов по ступеням нагружения. Трещины как в расчете, так и в опыте, образуются на 5 ступени при $P=2.5$ кН. Разрушение наступило при $P=14$ кП на 28 ступени.

Таким образом, анализ сопоставления результатов расчетов с

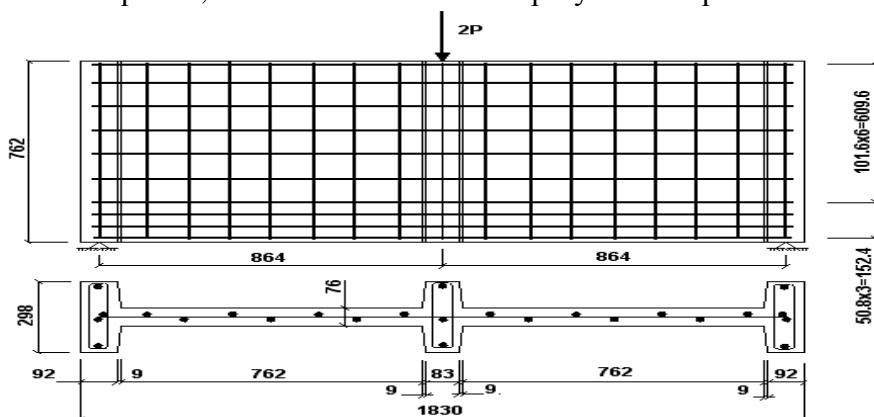


Рис.10.27. Геометрические размеры и армирование.

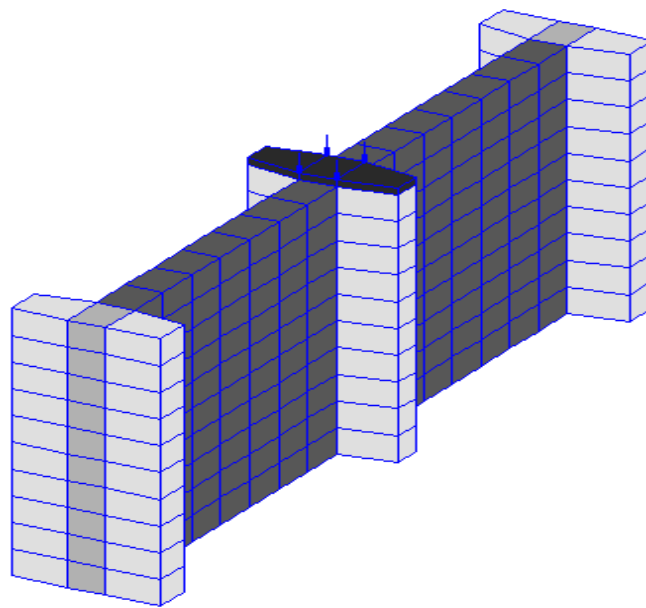


Рис.10.28. Расчетная схема

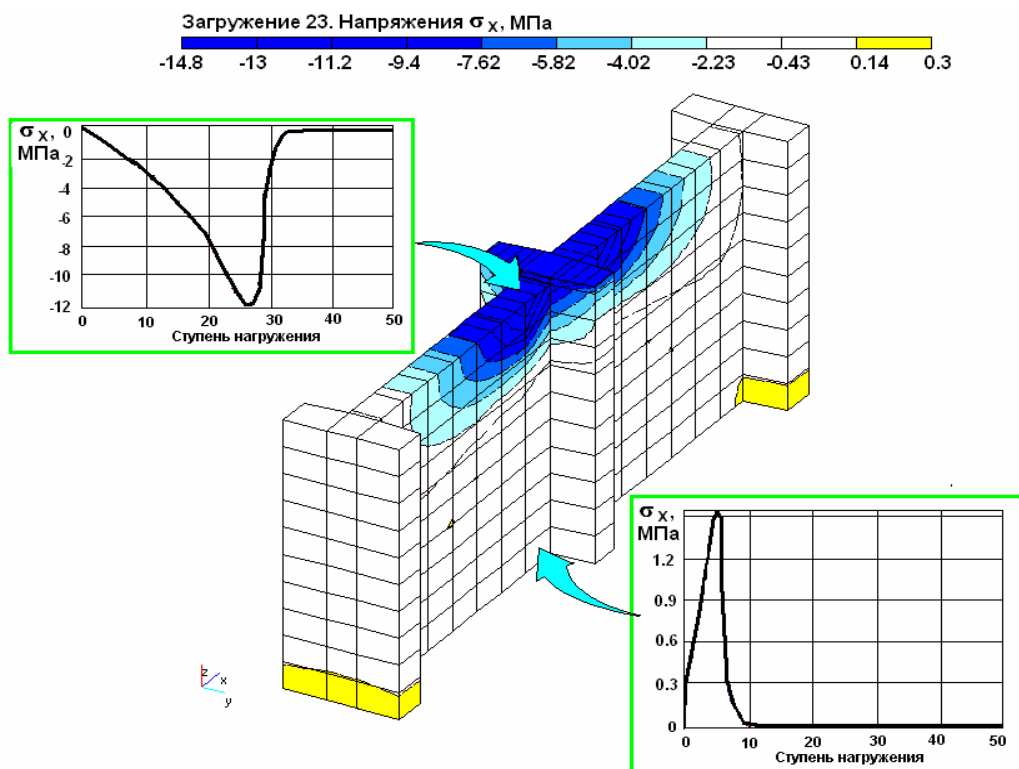


Рис.10.29. Результаты расчета нормальных напряжений в бетоне на 23 степени нагружения

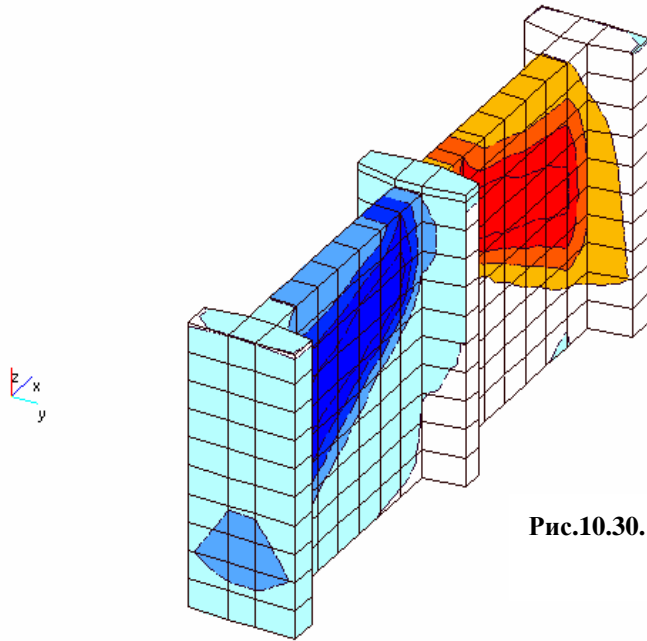
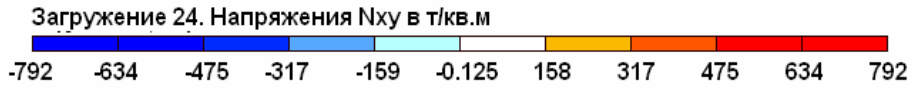


Рис.10.30. Напряжения τ_{xy} в бетоне

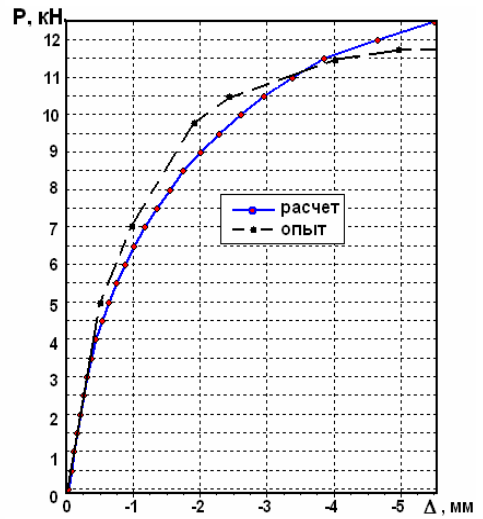
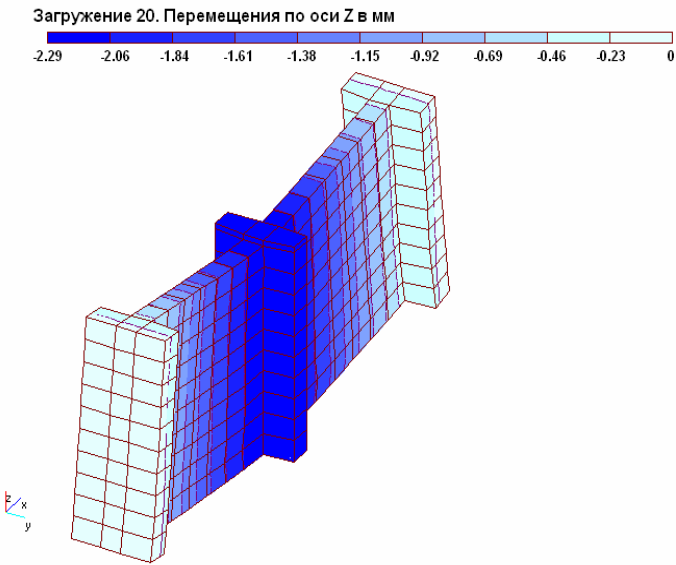


Рис.10.31. Результаты расчета вертикальных перемещений

опытными данными свидетельствует о достаточной надежности предлагаемой модели деформирования бетона.

10.2.4. В п. 8.1. дано описание многослойного конечного элемента толстой оболочки, который включен в библиотеку элементов пакета прикладных программ «Concord» [5]. Рассмотрим пример использования этого элемента при расчете квадратной железобетонной плиты [7] из опытов [16], опертой по углам и нагруженной сосредоточенной силой в центре. Геометрические размеры, схемы армирования, нагружения и расчетная представлены на рис.10.32. Исходные характеристики

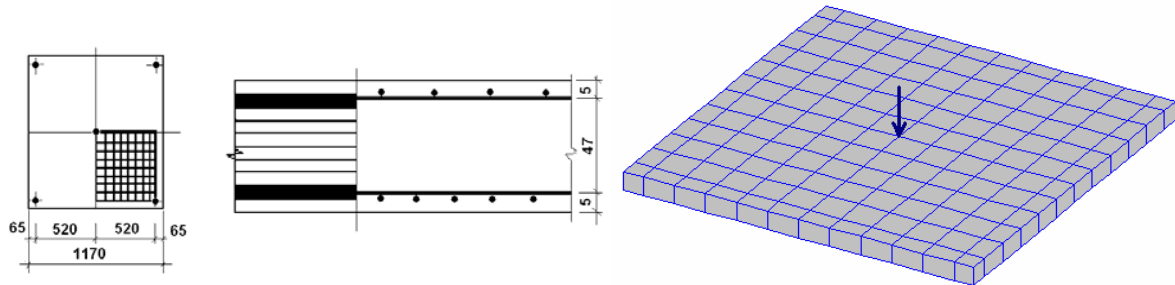


Рис.10.32. Конструкция и расчетная схема плиты

материалов: $R_b = 43$ МПа, $R_{bt} = 3$ МПа, $E_b = 16400$ МПа, предельные деформации сжатия $\varepsilon_b = 0.0035$, растяжения - $\varepsilon_{bt} = 0.0002$, $E_s = 201000$ МПа, $R_s = 6700$ МПа. По высоте плита разбивалась на 10 слоев. Рабочая арматура располагалась в 2 и 9 слоях, указанных на рисунке. Коэффициент армирования для нижней арматуры принимался равным $\mu_{sx} = \mu_{sy} = 0.06$, для верхней $\mu_{sx} = \mu_{sy} = 0.03$. Нагружение осуществлялось ступенями по $\Delta P = 1.3$ кН вплоть до разрушения. Расчет велся шагово-итерационным методом. Результаты расчетов представлены на рис.10.33 и 10-34. Здесь же, на рис.10.33 дано сопоставление с опытными данными по прогибам.

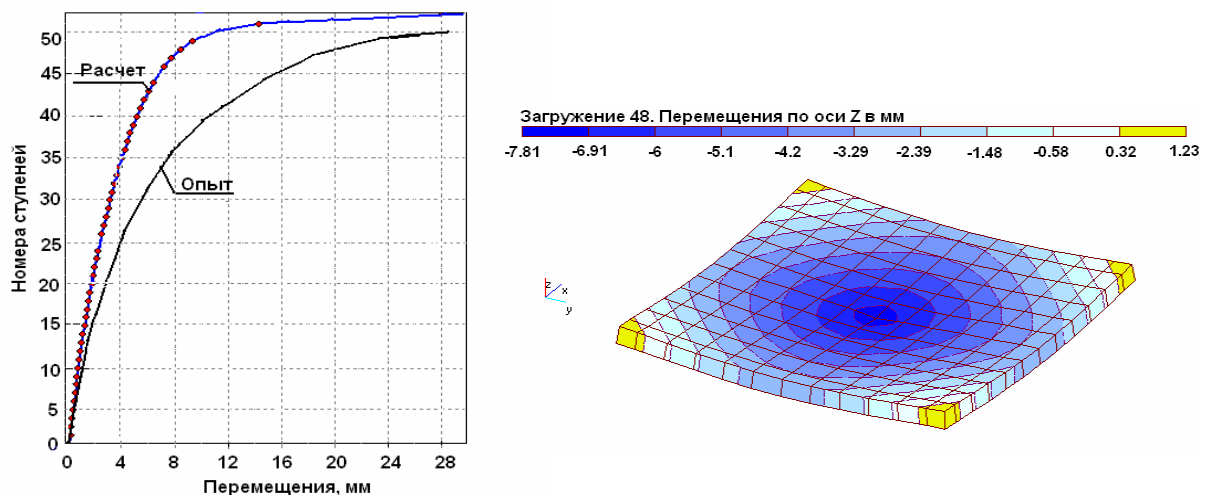


Рис.10.33. График прогибов и изолинии на 48 ступени.

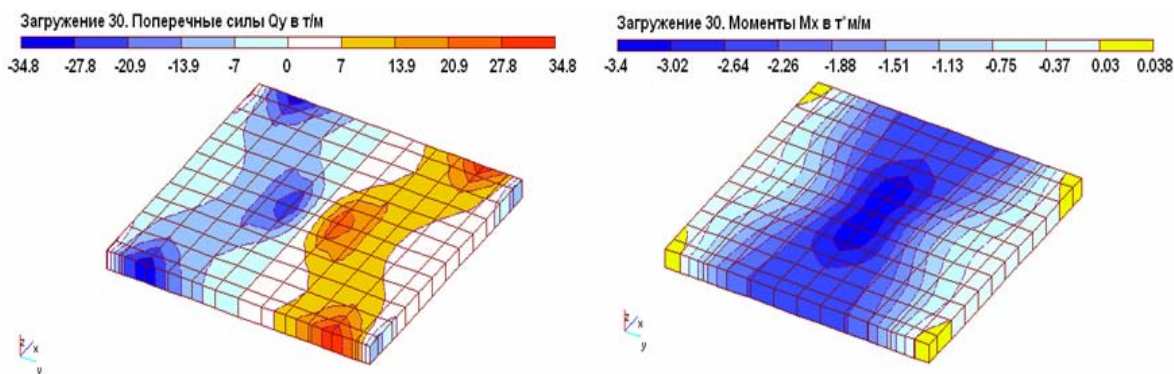


Рис. 10.34. Усилия в плите на 30 степени.

10.2.5. Рассчитывались фрагменты толстых свода-оболочки HNB 110-1 и HNB 200-2-Q(Q) из опытов [20] (рис.10.35а) при термосиловых воздействиях по модели железобетона, предложенной в гл. 6. Расчетная схема в виде совокупности изопараметрических осесимметричных элементов второго порядка представлена на рис.10.35 б. Фрагмент HNB 110-1 сначала подвергался равномерному нагреву до 110 °С и затем загружался сосредоточенной силой в центре. Характеристики материалов при нормальной температуре, из которых изготовлен образец: $R_b = 44.8$ МПа; $R_{bt} = 2.5$

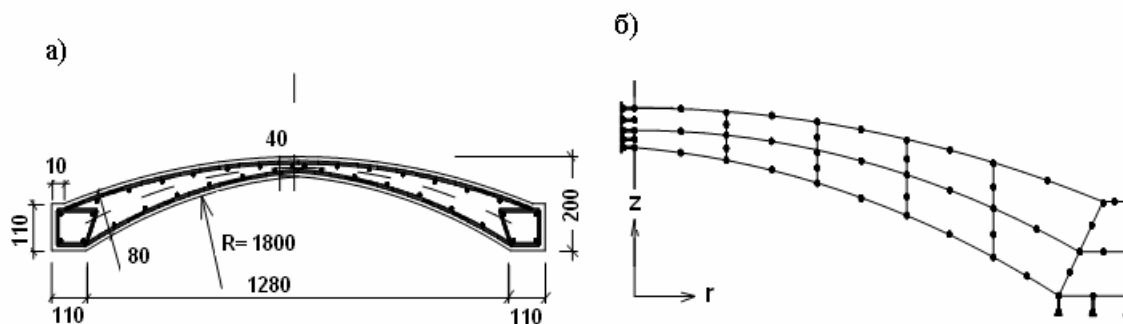


Рис. 10.35. Конструкция и расчетная схема свода

МПа; $E_b = 3.2 \times 10^4$ МПа; $\nu_b = 0.2$; $R_s = 1583$ МПа; $E_s = 2 \times 10^5$ МПа. Перед началом расчета характеристики бетона и арматуры уточнялись с учетом заданной температуры в соответствии с рекомендациями [12]. Расчетная нагрузка прикладывалась ступенями, аналогичными опытными. Первая ступень рассматривалась чисто температурной. На рис.10.36а приведены расчетные значения прогибов центра свода по ступеням нагрузки. Здесь же даны опытные данные. Разрушающая нагрузка по расчету и опыту составила $P^{теор} / P^{опыт} = 160/168$ кН, прогибы в центре в момент разрушения равны $\Delta^{теор} / \Delta^{оп} = 5.82/5.42$ мм.

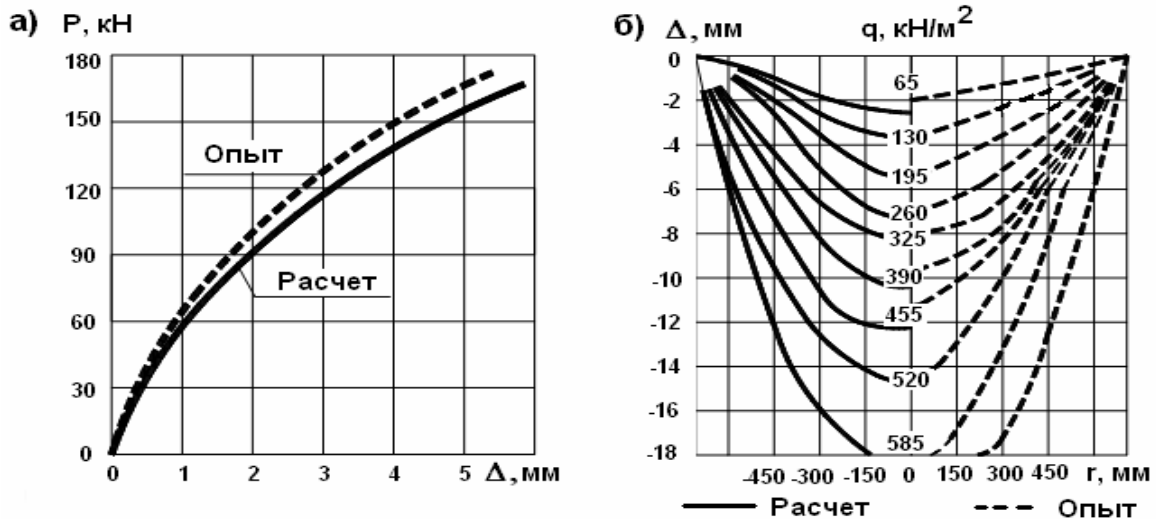


Рис.10.36. Вертикальные перемещения по ступеням нагружения.

Фрагмент HNB 200-2-Q (Q) нагревался неравномерно по толщине и температура на нижней грани равнялась 120°C , на верхней - 20°C . Загружение осуществлялось вертикальной равномерно распределенной нагрузкой, прикладываемой ступенями, равными $\Delta q = 65 \text{ кН/м}^2$ вплоть до разрушения. Исходные данные для расчетов принимались на основе результатов опытов следующими: $R_b = 49.4 \text{ МПа}$; $E_b = 3 \times 10^4 \text{ МПа}$; $R_{bt} = 2.5 \text{ МПа}$; $\nu_b = 0.2$; $E_s = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$; $R_s = 1583 \text{ МПа}$. Эпюры расчетных и опытных прогибов по ступеням нагружения представлены на рис.10.35б. Разрушающая нагрузка по расчету и опыту составила $q^{теор} / q^{он} = 585/618 \text{ кН/м}^2$, прогибы в центре в момент разрушения равны $\Delta^{теор} / \Delta^{он} = 25/28.86 \text{ мм}$. Процесс разрушения по обоим образцам в расчетах и опытах имел аналогичный характер. В целом совпадение расчетных и опытных данных вполне удовлетворительное.

10.2.8. С помощью программного комплекса “Concord” осуществлялся расчет автомобильной покрышки, используемой в качестве отбойного устройства для причального сооружения, с учетом изменяющихся связей и площадки приложения нагрузки [14].

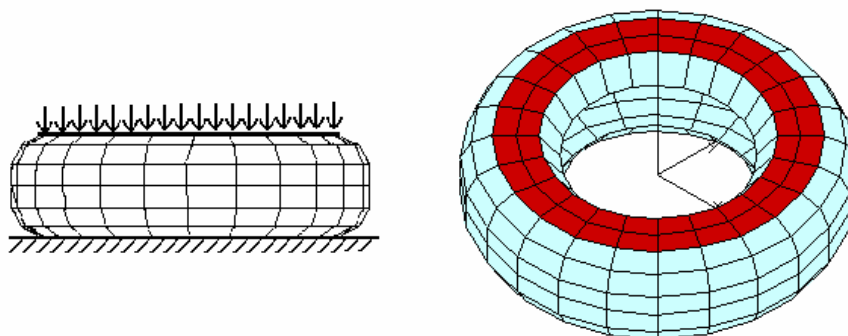


Рис.10.37. Расчетная схема отбойного устройства из автомобильной покрышки.

Рассчитывалась стандартная покрывка (ГОСТ 74-63-80) с внешним диаметром 1210 мм и шириной 280 мм. Модуль упругости материала $E=100$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.35$. Использовались четырехугольные оболочечные элементы общего вида, представленные в п. 5.4.1. Задача решалась шаговым методом с учетом геометрической нелинейности первого рода, т.е. по деформированной схеме, после каждого шага уточнялось положение координат узлов в пространстве. Расчетная схема представлена на рис.10.37. Покрывка работает между двумя жесткими поверхностями (штампами) как показано на том же рисунке. Из-за этого в процессе нагружения менялись как граничные условия, так и площадь приложения нагрузки. Расчет осуществлялся в нелинейной постановке шаговым методом с переходом на каждом шаге к новой расчетной схеме. На каждой ступени прикладывалась не только вертикальная, но и горизонтальная составляющая, обусловленная трением о

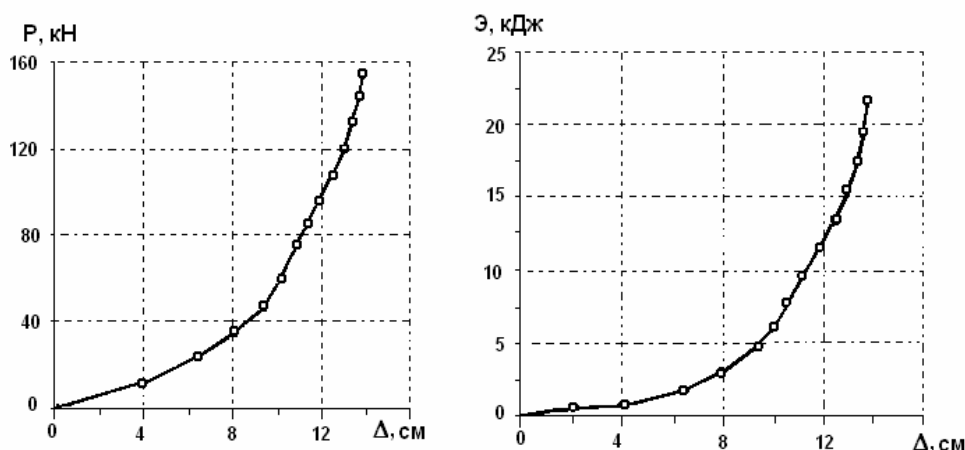


Рис.10.38. График перемещения штампа и энергоемкость отбойного устройства.

поверхность судна, величина которой определялась из расчета коэффициента трения, равного 0.5. Определялись перемещения и энергоемкость покрывки как величина потенциальной энергии деформаций. Расчетные графики нагрузка-перемещение, энергоемкость-перемещение показаны на рис.10.38. Видно, что оба графика носят явно нелинейный характер из-за существенной геометрической нелинейности задачи.

10.2.9. Материал данного раздела подготовлен совместно с В.И. Шеховцовым.

Нормативные методы расчета железобетонных плит на продавливание под действием жесткого штампа, ориентированы, как правило, на штампы прямоугольной или круглой формы. В основу расчета прочности таких плит положена гипотеза о существовании, так называемых, пирамиды или усеченного конуса продавливания, имеющих плоские грани или прямолинейные образующие с углом наклона, равным 45° . Однако, обоснованного экспериментального подтверждения эта гипотеза не имеет. В большинстве опытов поверхность разрушения имеет сложную форму даже для штампов простейшей геометрии. Если штамп имеет более сложную форму (крестообразную, тавровую, уголковую и т.д.), то рекомендации по расчету прочности в нормах вообще отсутствуют. Именно по этим причинам был проведен комплекс теоретических и экспериментальных исследований работы железобетонных плит под штампами различной конфигурации. Теоретические исследования проводились с

помощью метода конечных элементов в нелинейной постановке [5] с использованием ортотропной модели материала, описанной в главе 6 и восьмиузловых объемных

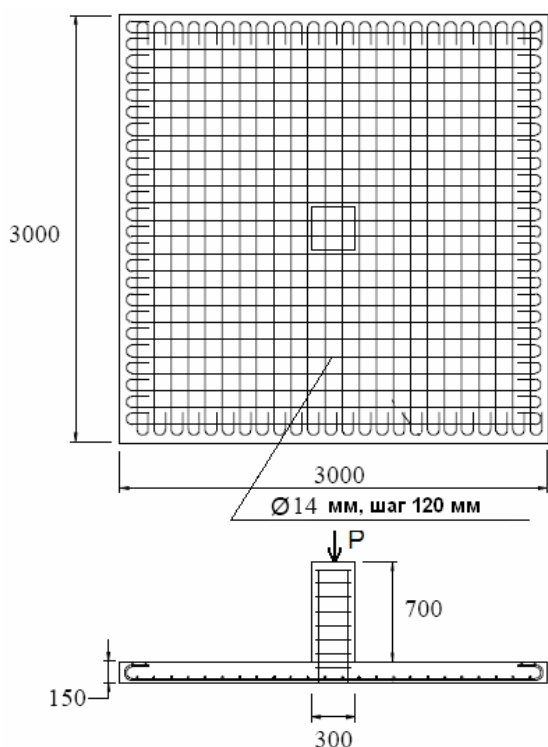


Рис 10.39. Экспериментальный образец

конечных элементов. На этапе тестирования модели и программы осуществлялся расчет железобетонной квадратной плиты под действием квадратного штампа (рис.10.39), по которой в литературе [18] имеются экспериментальные данные. Характеристики материалов приняты аналогично [18]: для бетона – $R_b=35$ МПа, $E_b=30000$ МПа, $\nu=0.2$; для арматуры – $\text{Ø}14$ $R_s=365$ МПа, $E_s=200000$ МПа.

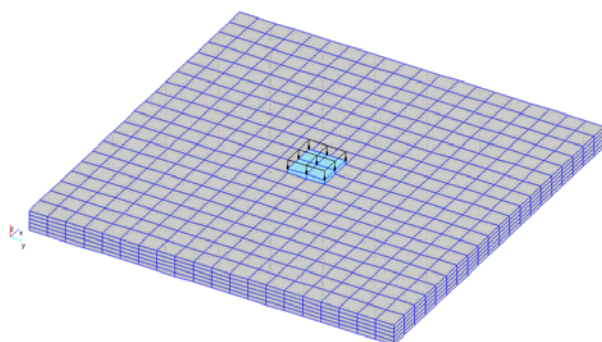


Рис 10.40. Расчетная схема.

Расчетная схема образца приведена на рис.10.40. В расчете штамп моделировался жесткой пластиной, к которой прикладывалась распределенная вертикальная нагрузка. Величина ступени нагружения $\Delta P=40$ кН. Условия опирания

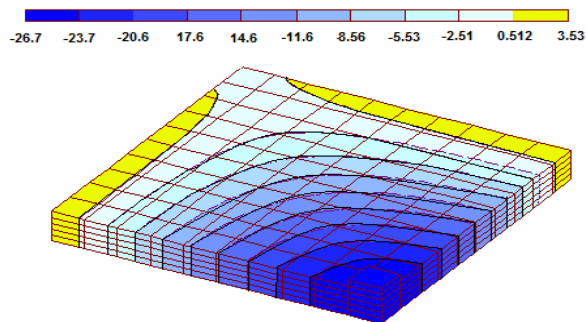


Рис.10.41. Вертикальные перемещения четверти плиты на 11 ступени в мм.

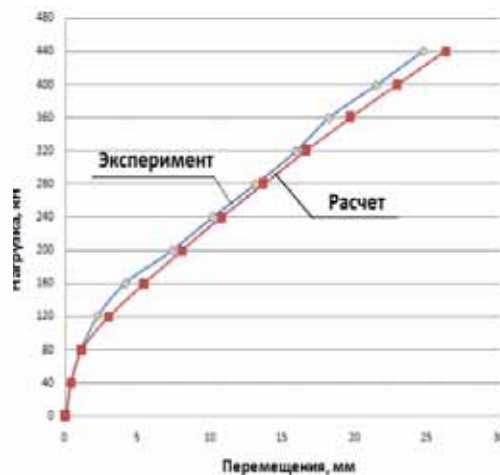


Рис 10.42. Вертикальные перемещения.

плиты – шарнирные по четырем сторонам. Расчетное разрушение образца произошло на 11 ступени при нагрузке 440 кН. Результаты расчетов в виде изолиний вертикальных перемещений и нормальных напряжений σ_z на этой ступени приведены на рис. 10.41-10.43. На рис. 10.42 представлены результаты расчетов прогибов плиты по ступеням нагружения и дано сопоставление с экспериментальными данными [18].

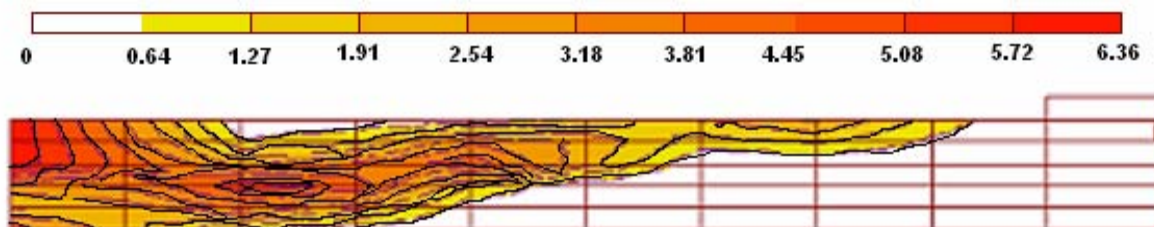


Рис 10.43. Напряжений σ_z в среднем сечении на 11 ступени для половины плит в МПа.

В целом результаты расчетов подтверждаются экспериментами. И в том, и другом случае форма поверхности разрушения далека от пирамидальной.

Большинство имеющихся в литературе экспериментальных данных получены на штампах прямоугольных и круглых. Для исследованию влияния штампов другой конфигурации проведена серия собственных экспериментов. Здесь приводится описание нескольких из них и результаты последующего расчета по методу конечных элементов. Испытывались серии квадратных плит с размерами

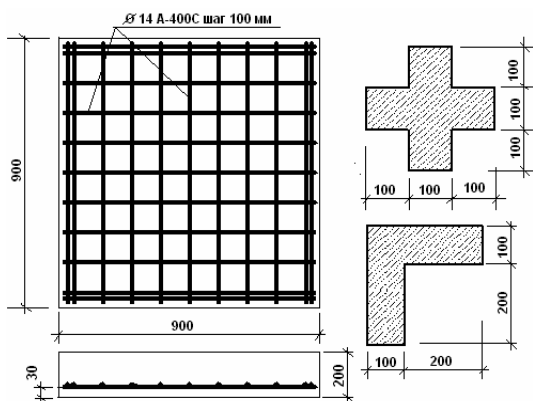


Рис. 10.44. Опытные образцы и виды штампов

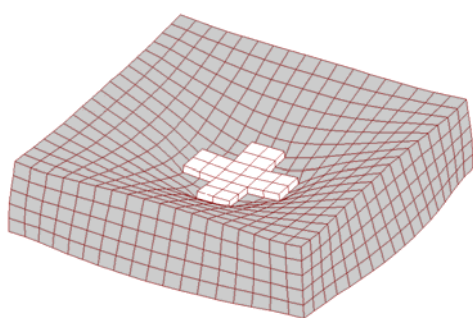


Рис 10.45. Деформированная схема

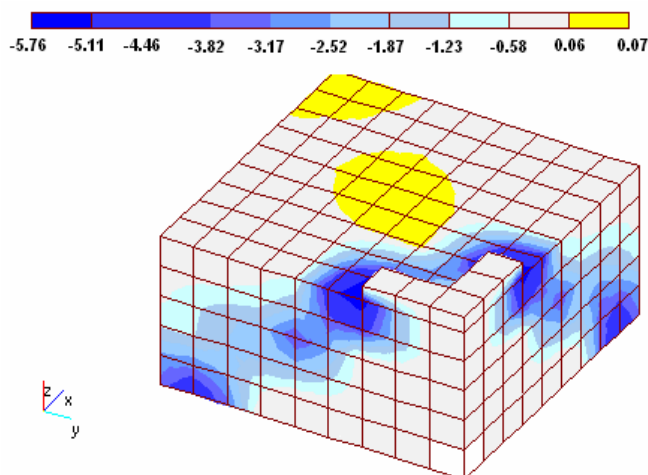


Рис 10.46. Напряжения в бетоне σ_z в МПа четверти плиты на 21 ступени

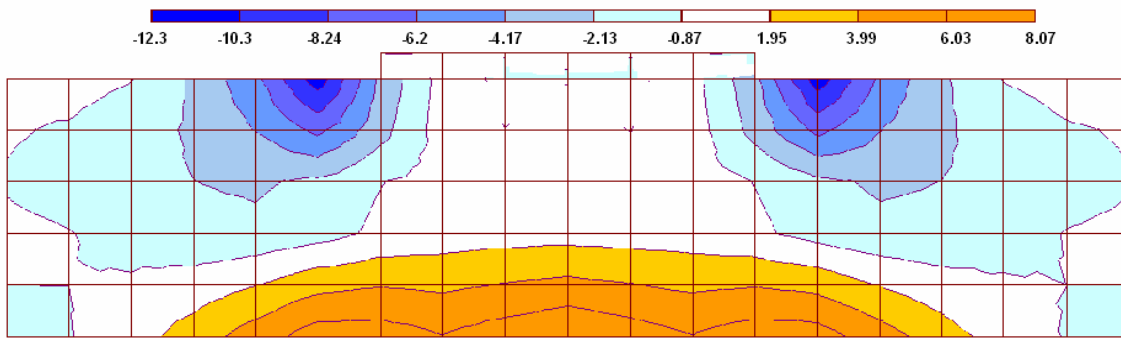


Рис. 10.47. Напряжения в бетоне σ_x в МПа на 20 ступени

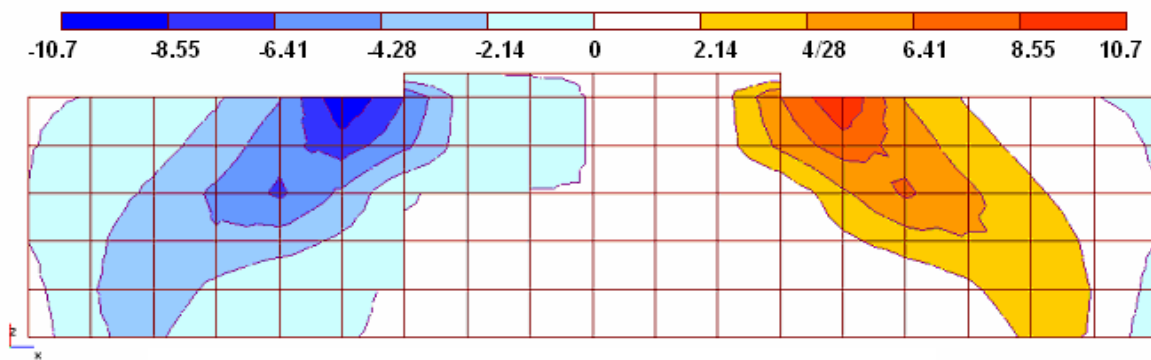


Рис 10.48. Касательные напряжения τ_{xz} в МПа 21 ступени

900x900x200 мм и шарнирным опиранием по всем сторонам. На рис. 10.44 приведены геометрические размеры, армирование опытных образцов и формы штампов. Загружение производилось ступенями до разрушения. Величина ступени нагружения

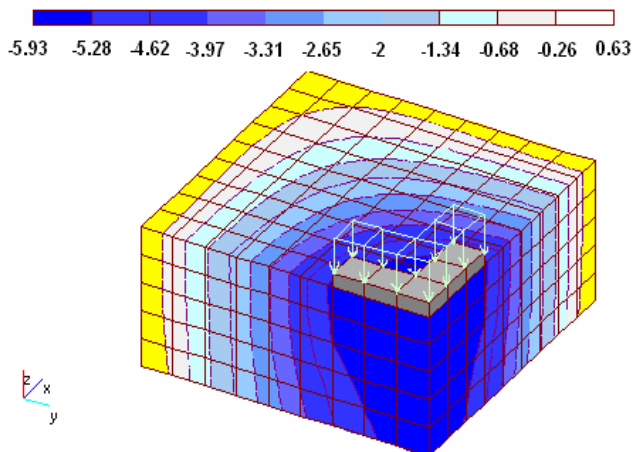


Рис. 10.49. Перемещения по оси Z в мм четверти плиты на 21 ступени.

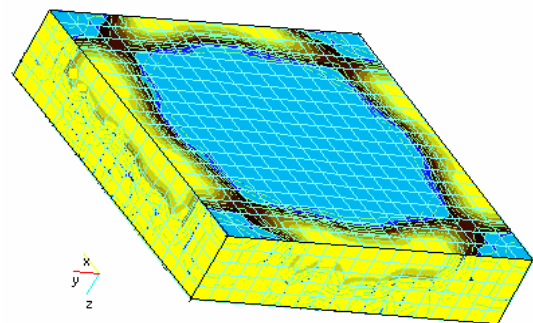


Рис. 10.50. Зона трещин на нижней грани плиты на 21-ой ступени .

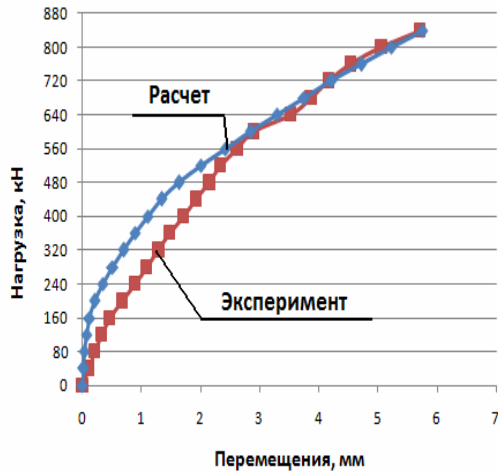


Рис 10.51. Прогибы плиты

нагрузке 840 кН. Результаты расчета в виде изолиний напряжений σ_z , σ_x , τ_{xz} приведены на рис. 10.46-10.48. На рис. 10.49 представлено сечение четверти плиты с изополями вертикальных перемещений, также приведены трещины на нижней грани плиты на 21-ой ступени загрузки (рис. 10.50). График расчетных прогибов образца по ступеням нагружения показан на рис. 10.51, здесь же приводятся экспериментальные данные.

Расчетная схема образца с угловым штампом приведена на рис.10.52. Характеристики: бетона – $R_b=22,1$ МПа, $R_{bt}=2,2$ МПа, $E_b=25000$ МПа, $\nu=0.2$; арматуры – $\varnothing 14$ $R_s=365$ МПа, $E_s=200000$ МПа. Для передачи нагрузки использовалась жесткая пластина, к которой прикладывалась нагрузка ступенями $\Delta P=40$ кН. В ходе

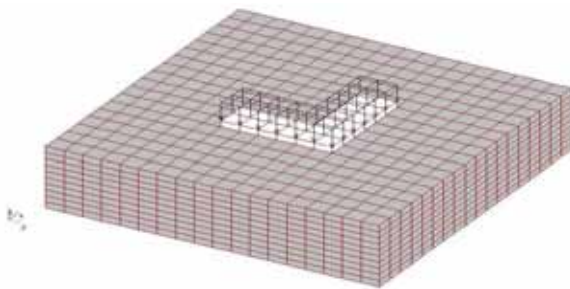


Рис. 10.52. Расчетная схема образца с угловым штампом

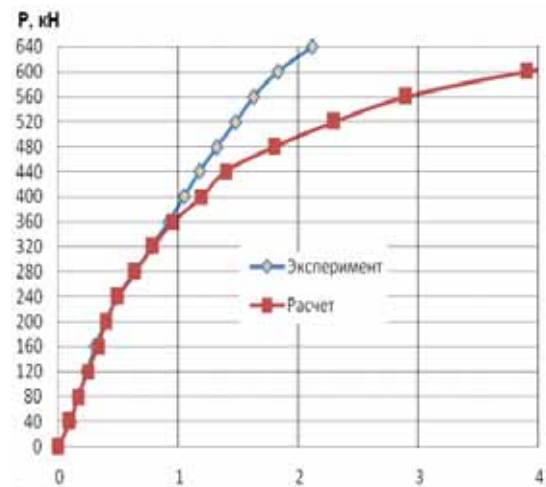


Рис.10.53. Прогибы плиты.

численного эксперимента разрушение образца произошло на 17 ступени при нагрузке 680 кН. Результаты расчета в виде изолиний напряжений σ_z , τ_{xz} приведены на рис. 10.54, 10.55. Сравнительный график расчетных прогибов образца с экспериментальными по ступеням нагружения показан на рис. 10.53.

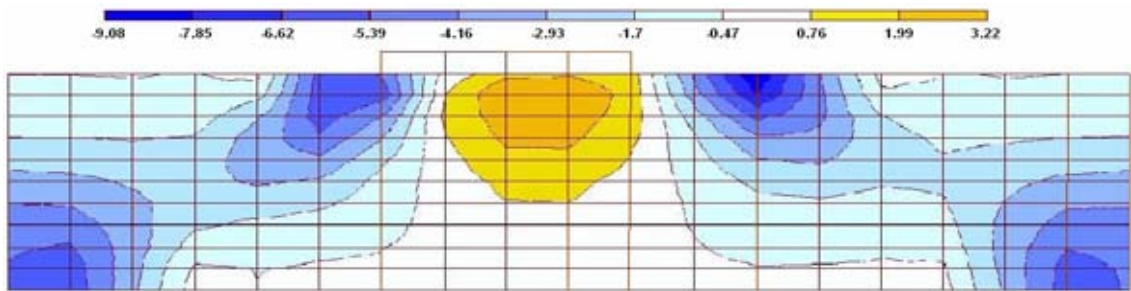


Рис.10.54. Напряжения $\sigma_{z,r}$ в МПа в бетоне на 16 ступени

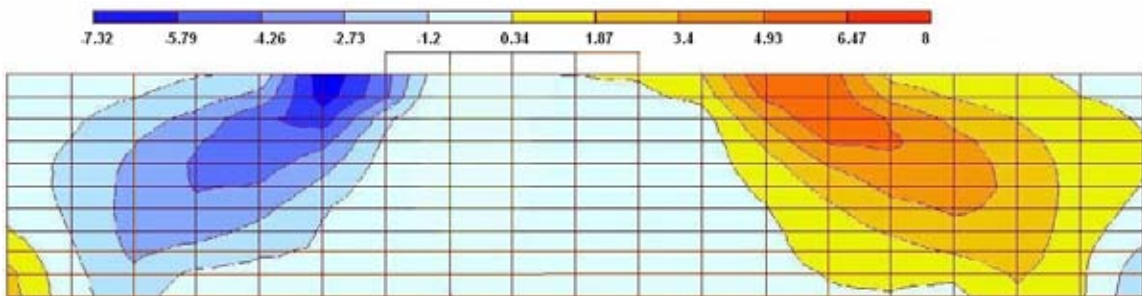


Рис.10.55. Касательные напряжения τ_{xz} в МПа в бетоне на 16 ступени

Анализ результатов расчетов и их сопоставление с экспериментальными данными свидетельствует о том, что существующая нормативная методика расчета прочности железобетонных плит на продавливание, основанная на гипотезе о пирамиде продавливания, не достаточно обоснована, т.к. ни опытами, ни расчетами по МКЭ эта гипотеза не подтверждается, даже в случае прямоугольных штампов. Достаточной надежные и достоверные расчетные результаты могут быть получены с помощью предлагаемой здесь методики.

10.3. Геотехнические задачи

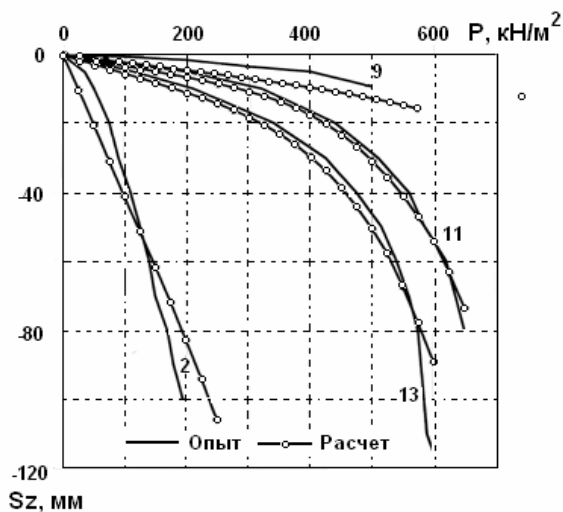


Рис.10.56. Вертикальные перемещения штампа

10.3.1. Для решения геотехнических задач в состав программного комплекса “Concord” были включены физические модели, описывающие поведение грунта при сложном напряженном состоянии, рассмотренные в гл. 7. Задачи решались шагово-итерационным методом Ньютона-Канторовича (п. 2.5).

Приведем результаты численного решения МКЭ тестовой задачи о действии квадратного жесткого штампа на грунт и сопоставим результаты расчетов с экспериментальными данными для различных видов грунтов [1]. Испытания проводились в

прямоугольном лотке размером 200x140x140 см. Глубина основания штампа – 20 см, его размер 40x40 см. Нагрузка в испытаниях постепенно увеличивалась ступенями по 24 кН/м². В соответствии с этими данными была построена расчетная схема в виде совокупности плоскодеформированных четырехугольных изопараметрических элементов. В расчете рассматривалась только симметричная часть образца. В качестве базовой для данной задачи была принята деформационная модель грунта (п.7.4.6). Расчетные характеристики грунта, отвечающие экспериментальным данным [1]: *опыт № 2* (песок) $E=0.3$ МПа, $\varphi=26^\circ$, $c=0.001$ МПа; *опыт № 9* (песок) $E=8$ МПа, $\varphi=38^\circ$, $c=0.001$ МПа; *опыт № 11* (суглинок) $E=3.9$ МПа, $\varphi=18^\circ$, $c=0.065$ МПа; *опыт № 13* (суглинок) $E=2.5$ МПа, $\varphi=18^\circ$, $c=0.045$ МПа. Во всех случаях коэффициент Пуассона принимался равным $\nu=0.35$. Нагружение в расчете принималось аналогично опытному. Результаты расчета осадок штампа в мм по ступеням нагружения представлены на рис.10.56. Здесь даны номера образцов и сопоставление с опытными данными. На рис.10.57 представлены изолинии перемещений и напряжений на 25 ступени нагружения ($P=600$ кН/м²) под штампом из опыта № 11. Из

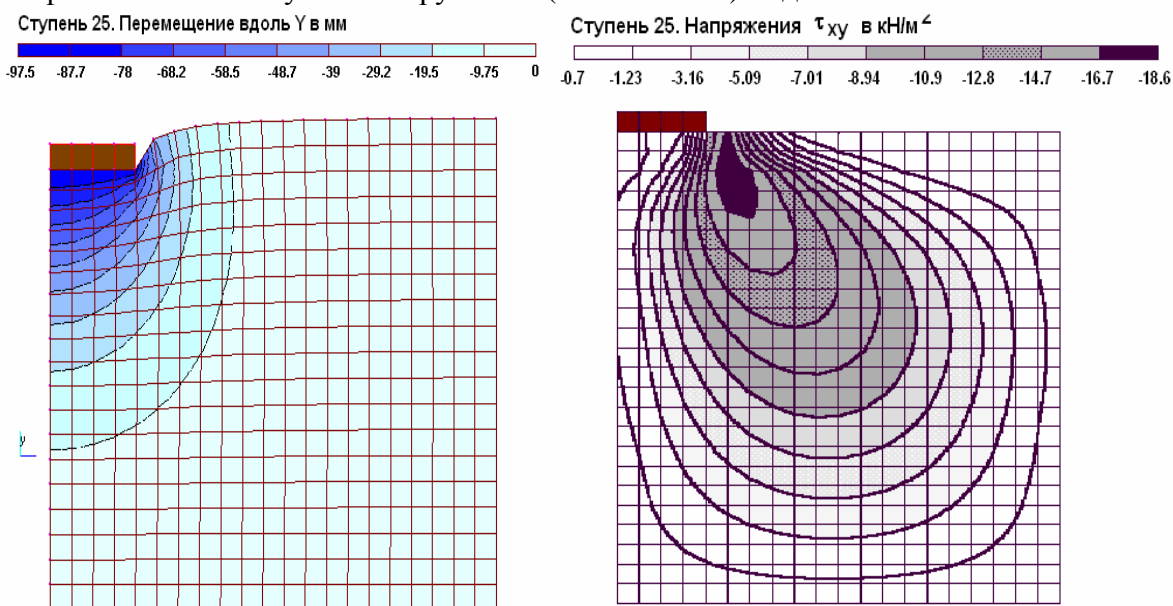


Рис.10.57. Вертикальные перемещения касательные напряжения под штампом в опыте № 11

рисунков видно, что расчетный характер деформированного и напряженного состояния грунта под штампом отвечает истинному.

10.3.2. Рассматривался расчет моделей больверков толщиной 3.2 мм и 8 мм, результаты экспериментальных исследований которых приведены в работе [10]. Расчетная схема моделей полностью соответствует экспериментальным образцам и приведена на рис.10.58. Использовались изопараметрические плоскодеформированные четырехугольные элементы. Характеристики грунта: модуль деформаций $E=1.5$ МПа, коэффициент поперечных деформаций $\nu=0.35$, объемный вес $\rho =15.8$ кН/м³, угол внутреннего трения $\varphi = 33^\circ$, сцепление $c=0$.

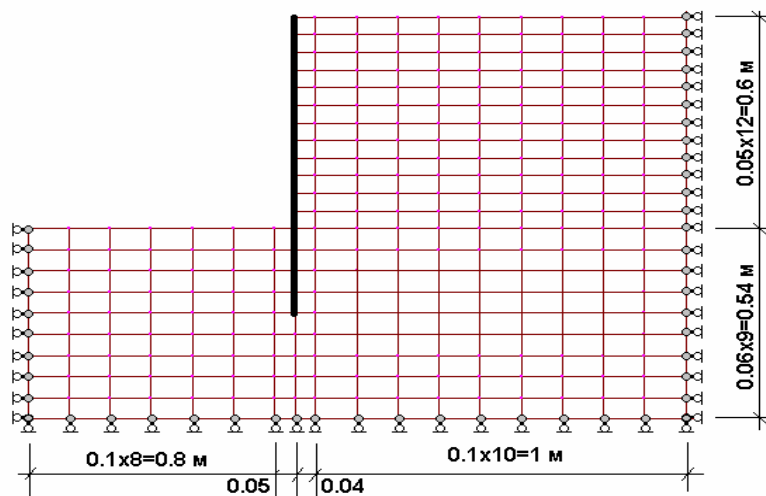


Рис.10.58. Расчетная схема фрагмента.

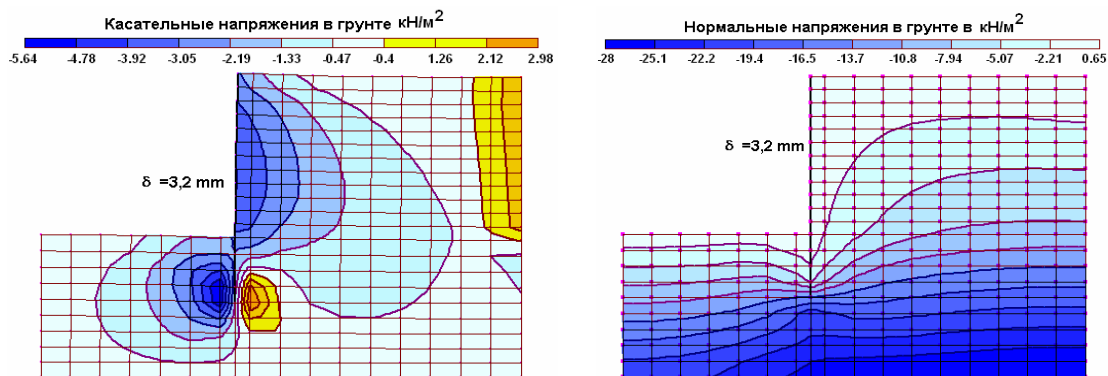


Рис. 10.59. Напряжения в грунте от действия собственного веса.

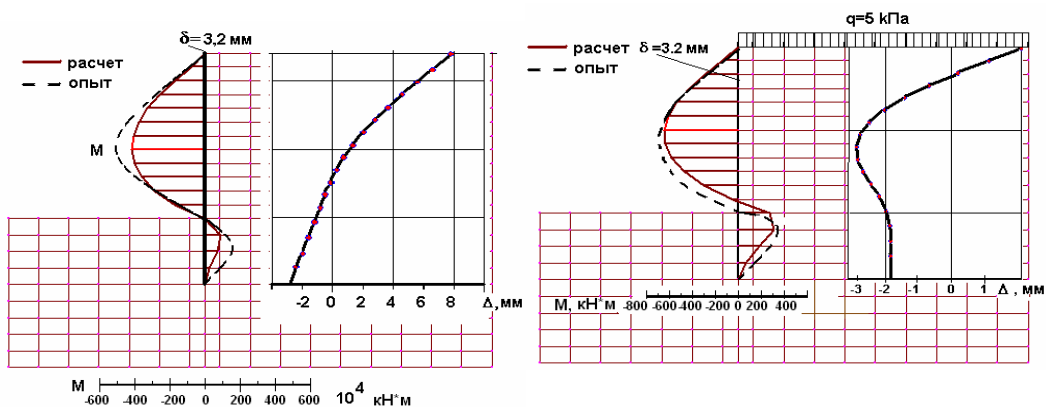


Рис.10.60. Изгибающие моменты и горизонтальные перемещения стенки толщиной

Нелинейные свойства грунтов устанавливались по деформационной модели. Результаты расчетов при толщине стенки, равной 3.2 мм приведены на рис.10.59, 10.60. Так, напряжения в грунте даны на рис.10.59, эпюры изгибающих моментов в

стенке и ее горизонтальные перемещения при действии только собственного веса грунта, а также собственного веса и дополнительной поверхностной нагрузки 5 кПа - на рис.10.60. Здесь приведены опытные данные. На рис.10.61 приведены результаты

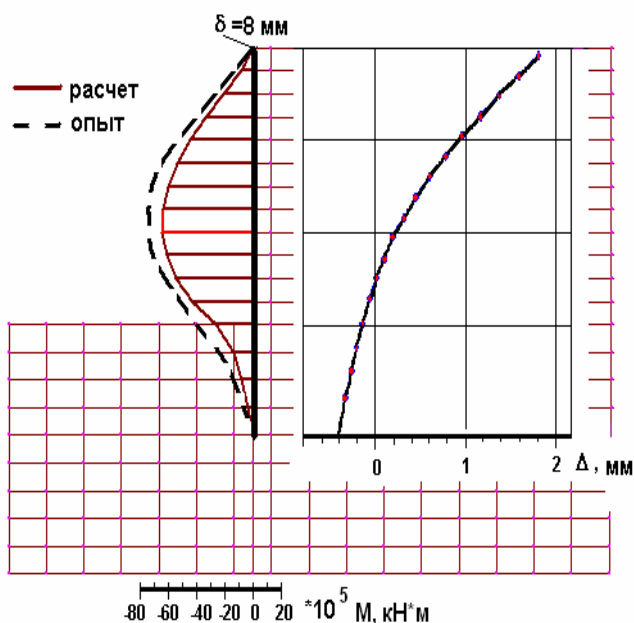


Рис.10.61. Изгибающие моменты и горизонтальные перемещения стенки 8 мм.

расчета образца со стенкой толщиной 8 мм.

10.3.3. Рассматривался расчет гибкой анкерной стенки набережной порта, результаты натурных наблюдений которой приведены в работе [2]. Расчетная схема набережной приведена на рис.10.62. Материал стенки – железобетон с $E_b= 2000$ МПа, анкер – стальной диаметром 75 мм. Результаты расчетов изгибающих моментов и активного давления грунта на стенку сопоставлялись с результатами натурных наблюдений и приведены на том же рисунке.

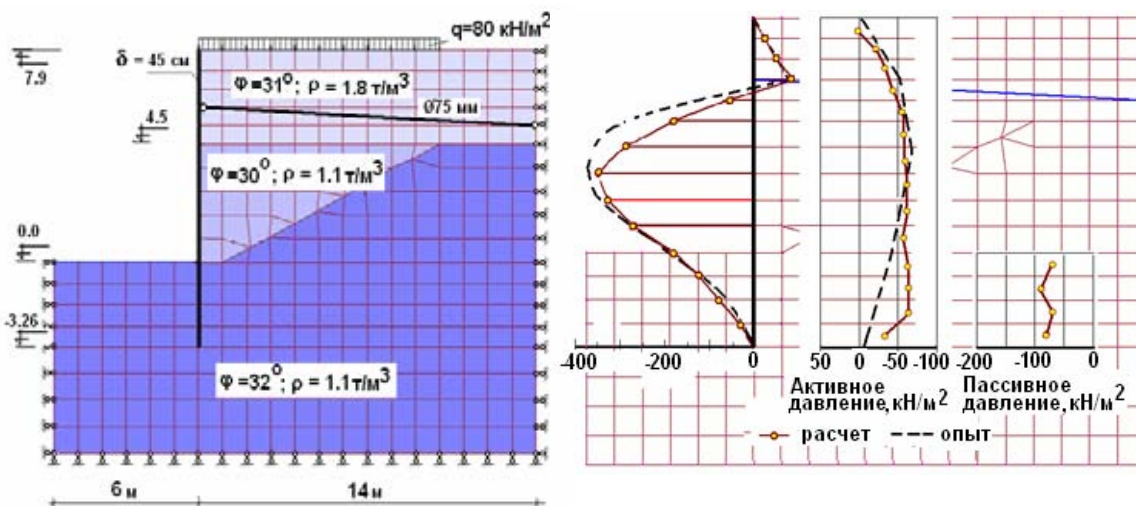


Рис.10.62. Анкерная стенка набережной.

10.3.4. В работе [8] приведены данные натурных испытаний одиночных свай. С помощью программного комплекса «Concord» был произведен расчет одной из них (свая 1*). Длина сваи 9.0 м, диаметр 53 см, характеристики грунта (песок): $E=20$ МПа, $\mu=0.2$, $\varphi=32^\circ$, $c=0$ кПа. Расчетная схема в виде совокупности осесимметричных изопараметрических конечных элементов четырехугольной формы представлена на рис.10.63. Расчет осуществляется в два этапа [3]. На первом этапе шаговым методом решалась задача о вынужденных вертикальных и горизонтальных перемещениях узловых точек, лежащих на оси вращения, которая моделирует процесс вытеснения грунта свайей (рис.10.64). Поскольку значения вынужденных перемещений соизмеримы

с размерами элементов, на каждом шаге корректируется исходная расчетная схема с помощью уточнения координат узлов с учетом перемещений, полученных на предыдущем шаге. Вычисленная при решении первого этапа геометрия, значения характеристик грунта, его напряженно-деформированное состояние позволяют перейти ко второму этапу решения задачи о загрузении сваи в грунте.

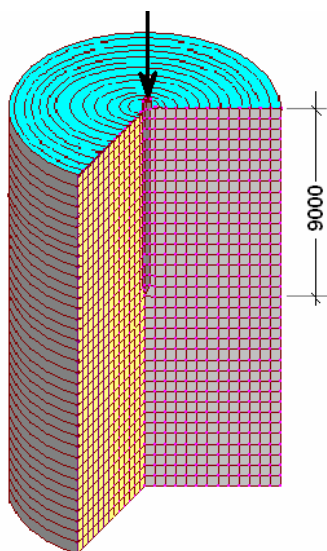


Рис.10.63. Расчетная схема

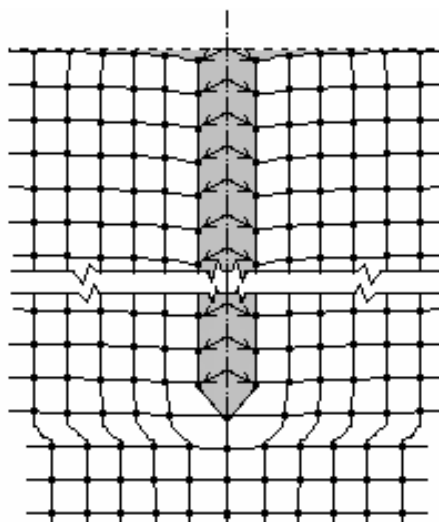


Рис.10.64. Первый этап

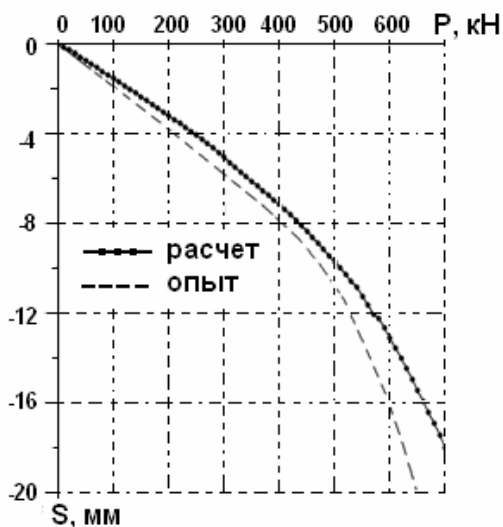


Рис.10. 65. График вертикальных перемещений сваи

рис.10.65 приведен график вертикальных перемещений верха сваи по ступеням нагружения. На рис.10.66 – изолинии вертикальных перемещений точек грунта вокруг сваи и распределение нормальных и касательных напряжений на ступени нагружения, соответствующей $P=600$ кН.

Для этого образовавшуюся полость, полученную в результате вытеснения грунта свай, заполняют конструкционным материалом и вводят в рассмотрение дополнительные элементы, моделирующие сваю (рис.10.64). Расчет велся с использованием теории течения грунта, учитывающей его уплотнение в процессе нагружения по методике, изложенной в п.7.3.6. На границе грунт-свая были введены специальные контактные элементы, описанные п.8.3. Нагружение в виде вертикальной сосредоточенной силы на верхний конец сваи, осуществлялось ступенями по $\Delta P=100$ кН вплоть до предельного состояния. На рис.10.65, 10.66 даны результаты расчетов и сопоставление с экспериментальными данными. Так, на

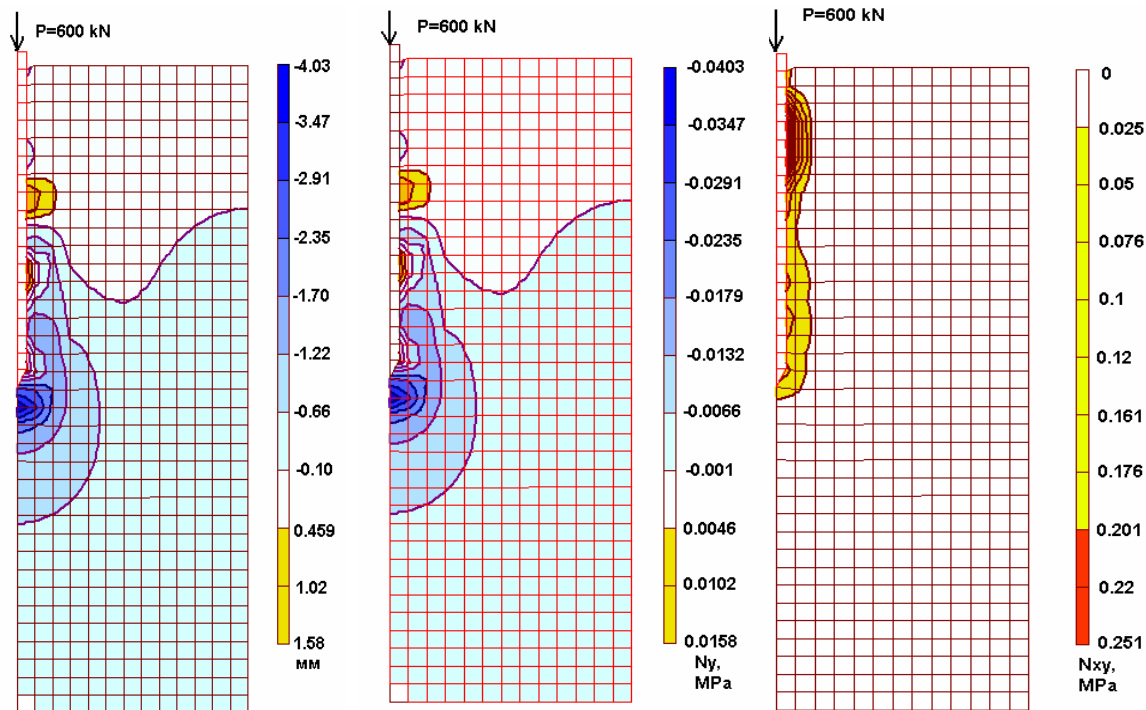


Рис.10.66. Изолинии вертикальных перемещений грунта, нормальных и касательных напряжений

10.3.5. В этом примере моделируется процесс отсыпки насыпи. Расчетная схема насыпи представлена на рис.10.67. Характеристики грунта насыпи: модуль деформации $E=3\text{ МПа}^2$, коэффициент Пуассона $\nu =0.35$, объемный вес $\rho =2.0\text{ т/м}^3$, угол внутреннего трения $\varphi =18^\circ$, сцепление $c =0.01\text{ МПа}$. Задача рассматривалась как плоскодеформированная и решалась шаговым методом с итерациями на каждом шаге. Итерационный процесс осуществлялся по процедуре Ньютона-Канторовича. Модель

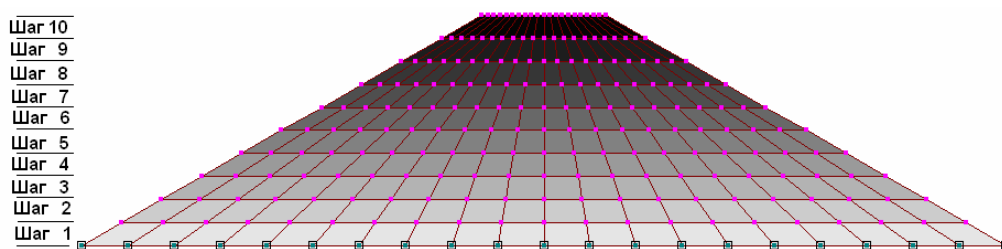


Рис.10.67. Послойная отсыпка насыпи

грунта принята по теории течения, изложенной в п.7.3.4. Каждый шаг решения соответствовал одному слою отсыпки. Рост насыпи в высоту моделировался добавлением очередного слоя и наращиванием расчетной схемы дополнительной группой элементов, соответствующей этому слою. При этом величина очередной ступени нагружения принималась равной собственному весу данного слоя грунта. Первый, нижний слой насыпи устанавливался на упругом основании.

Результаты расчета насыпи на различных ступенях отсыпки в виде изолиний вертикальных перемещений и касательных напряжений представлены на рис.10.68.

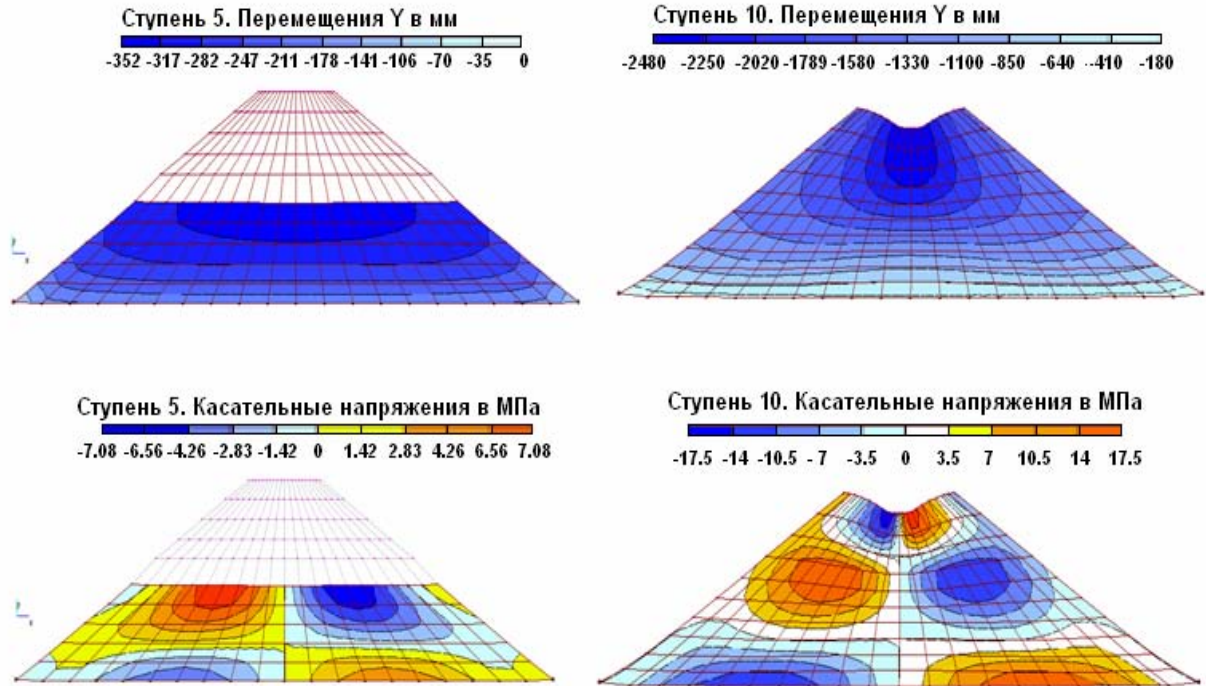


Рис.10.68. Результаты расчета насыпи.

10.3.6. Приведем пример расчета напряженно-деформированного и предельного состояния склона под действием собственного веса грунта. Характеристики грунта были приняты следующими: модуль $E=100$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.35$,

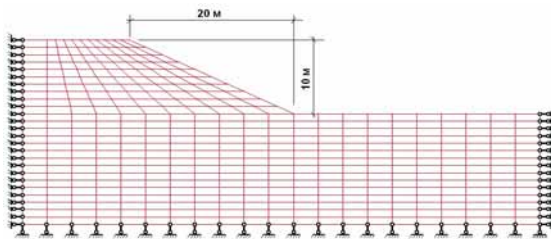


Рис.10.69. Расчетная схема склона.

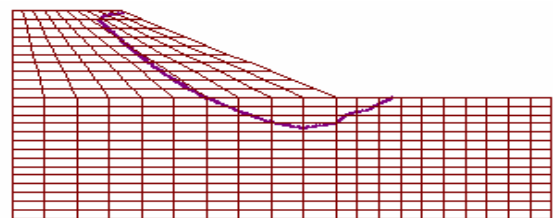


Рис.10.70. Линия скольжения

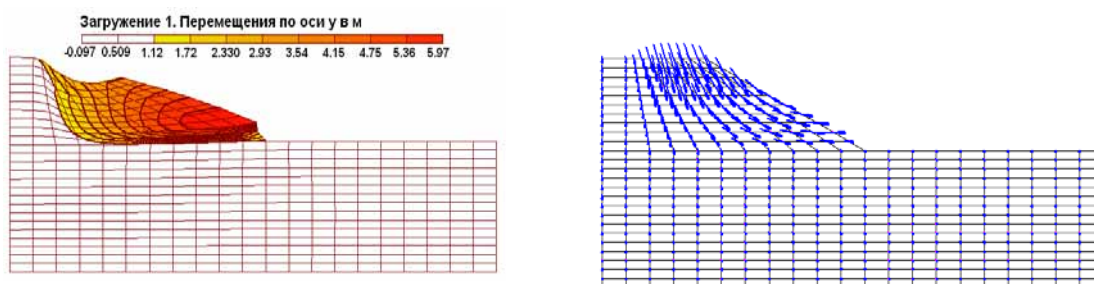


Рис.10.71. Вертикальные и общие перемещения

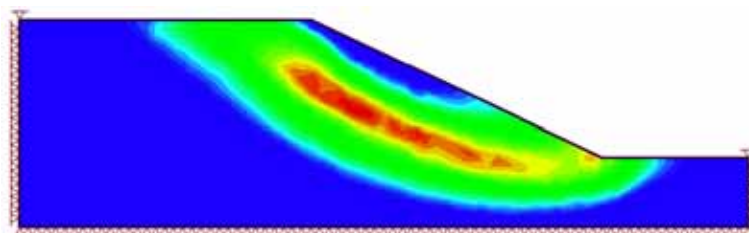


Рис.10.72. Расчет деформаций по [17].

объемный вес $\rho = 2.02 \text{ т/м}^3$, угол внутреннего трения $\varphi = 19.6^\circ$, сцепление $c = 0.003 \text{ МПа}$. Расчетная схема фрагмента склона представлена на рис.10.69. Ширина полосы из плоскости склона принята равной 100 см. Расчет осуществлялся итерационным методом Ньютона-Канторовича с использованием изопараметрических плоскодеформированных четырехугольных элементов и модели материала, рассмотренной в п.7.3.4. Результаты расчета представлены на рис.10.70, 10.71. Так, на рис.10.70 представлены линии скольжения, по которым происходит потеря устойчивости склона. Положение линий скольжения устанавливалось по условию прочности грунта. Вдоль этих линий октаэдрические касательные напряжения достигают предельных значений. Деформированное состояние массива в момент

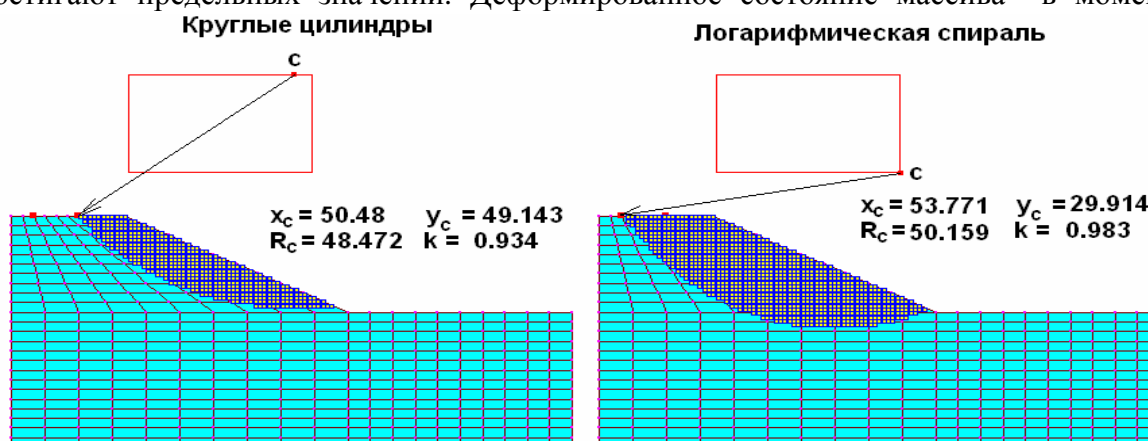


Рис.10.73. Расчет склона методом предельного равновесия.

потери устойчивости представлено на рис.10.71. Здесь отображены изолинии вертикальных перемещений и стрелками показаны величины и направления узловых перемещений. Выбор такого фрагмента в качестве тестового обусловлен тем обстоятельством, что по нему имеются расчетные результаты, приведенные в работах [17,18]. В этих работах характеристики материала, геометрические размеры склона были подобраны таким образом, чтобы его коэффициент устойчивости, найденный методом предельного равновесия с использованием круглоцилиндрических поверхностей скольжения, был равен единице. Результаты расчета пластических деформаций по программе [17], представлены на рис.10.72. Видно, что общий вид неустойчивого состояния склона совпадает с данными, приведенными на рис.10.71.

В дополнение, расчетным путем был установлен коэффициент устойчивости склона с использованием метода предельного равновесия по линиям скольжения. Рассматривались линии скольжения в виде круглого цилиндра и логарифмической спирали. Для этого в состав программного комплекса “Concord” была включена соответствующая дополнительная процедура. Решалась задача определения наиболее оптимальной линии скольжения из условия минимума коэффициента устойчивости перебором величин радиусов окружностей или спиралей и положения их центра. Коэффициент устойчивости определялся методом Бишопа. На рис.10.73. приведены результаты расчетов, выполненные с помощью этой дополнительной программной процедуры с использованием двух типов предельных линий – круглых и описываемых логарифмической спиралью. Коэффициенты устойчивости склона, в обоих случаях, получились близкими к единице (0.984 и 0.943), что свидетельствует о достаточно хорошем совпадении с данными работы [17]. Характер предельных зон полностью отвечает результатам расчета по МКЭ (рис.10.71).

10.3.7. В заключение приведем без комментариев два наглядных примера из проектной практики. В первом из них (рис.10.74) определялись вертикальные перемещения дневной поверхности над подземными выработками цилиндрической формы.

Во втором примере (рис.10.75) решалась задача определения усилий в опорных элементах глубокого котлована, выработанного методом «стена в грунте».

В обоих случаях применялась деформационная модель грунта. Задачи решались в один шаг. Нелинейное решение получалось методом итераций по Ньютону-Канторовичу. Использовались плоскодеформированные изопараметрические четырех- и трехугольные, а также стержневые элементы. Характеристики грунтов указаны на рисунках. Материал стенки во втором примере – железобетон.

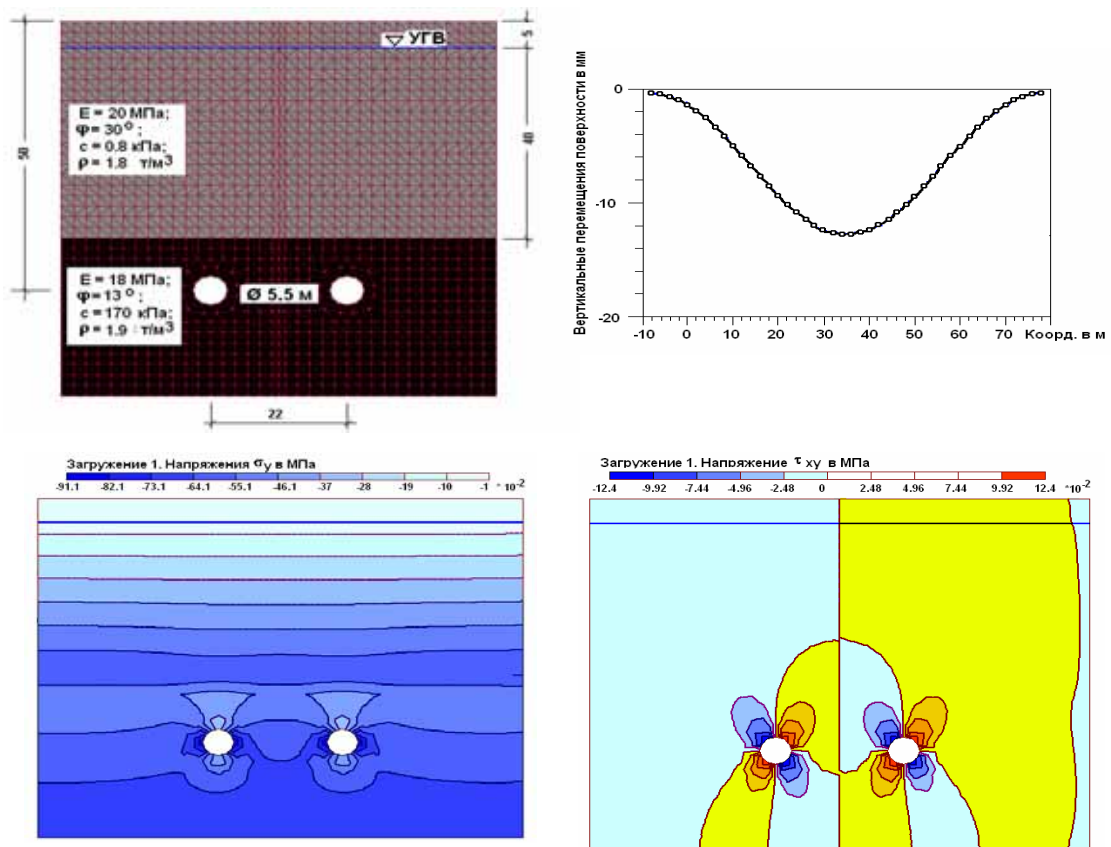


Рис.10.74. Подземные тоннели

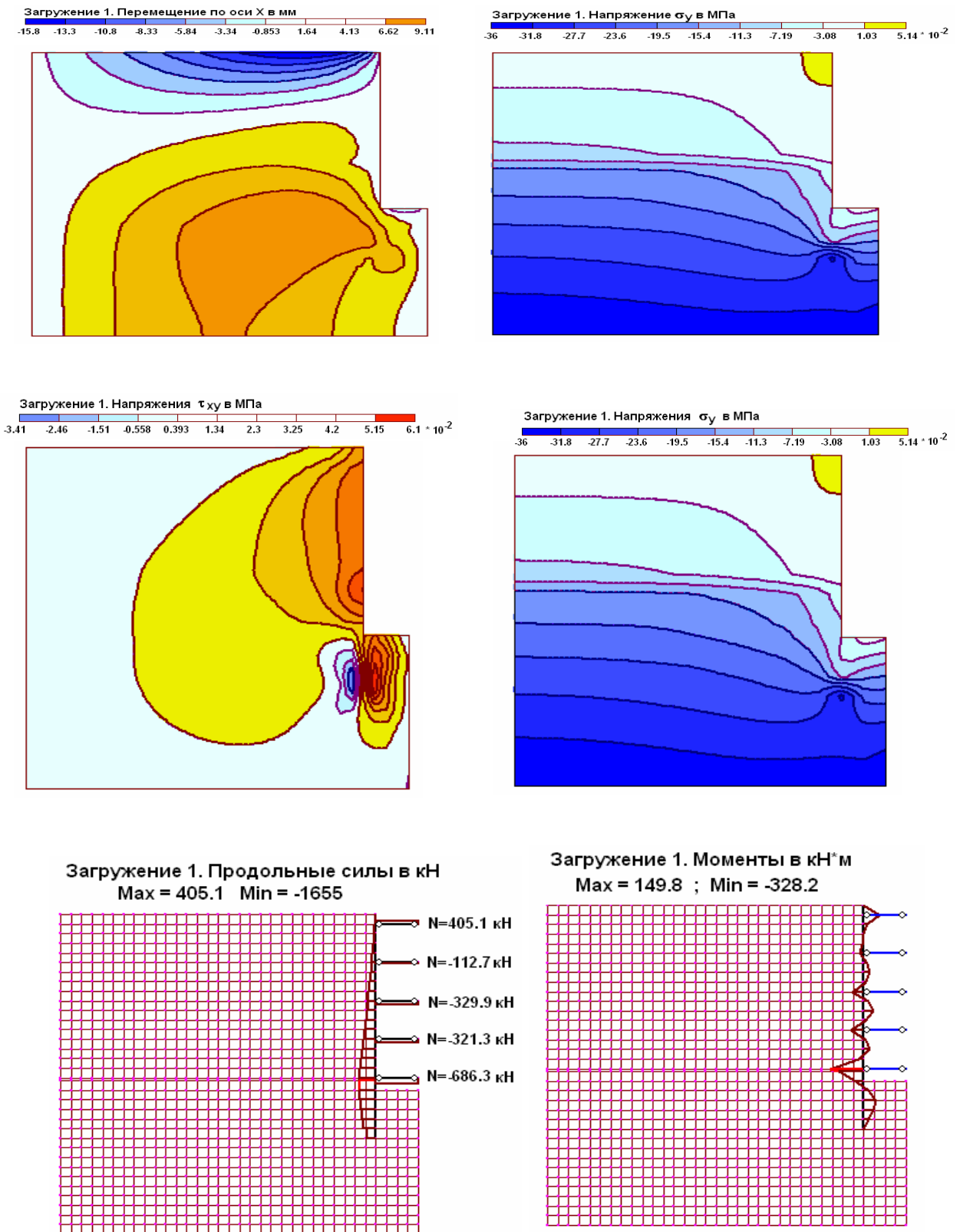


Рис.10.75. Стена в грунте

ЛИТЕРАТУРА

1. Балюра. М.В. Горизонтальные перемещения в основании под жестким штампом// Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1973. -№6. –С.39-41.
2. Гуревич В.Б. Речные портовые гидротехнические сооружения. - М.: «Транспорт», 1969.-416с.
3. Карпенко Н.И., Клованич С.Ф., Школа А.В., Винников Ю.Л. Моделирование работы фундаментов уплотнения методом конечных элементов//Вестник отделения строительных наук. – М.: РААСН, 1999. – вып.2. – с.191-195.
4. Клованич С.Ф, Мироненко И.Н. Метод конечных элементов в механике железобетона. – Одесса: Изд-во ОНМУ, 2007.- 111 с
5. Клованич С.Ф. «Concord». Программный комплекс решения геотехнических задач методом конечных элементов. Руководство пользователя. – Одесса, 2003. – 63 с.
6. Клованич С.Ф., Безушко Д.И. Метод конечных элементов в нелинейных расчетах пространственных железобетонных конструкций. –Одесса: ОНМУ, 2009. – 89 с.
7. Клованич С.Ф., Безушко Д.И. Использование криволинейного изопараметрического слоистого конечного элемента для расчета железобетонных плит и оболочек// Вестник ОГАСА.-вып.25. – 2007. – С. 155-161.
8. Лажевич О.А. Несущая способность сваи при опрессовке грунта//Строительство. -№ 3-4, - Минск, 2003. – С.145-148.
9. Лессиг Н.Н. Теоретические и экспериментальные исследования прочности железобетонных балок, подверженных совместному изгибу и кручению//Расчет иконструирование железобетонных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1958.
10. Перевазкин Ю.А. Лабораторные исследования отчерпанных и засыпных одноанкерных больверков // Сб.научн.тр. - Л.: 1967.-С.172-177.
11. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. - 79 с.
12. СНиП 2.03.04-84. Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия повышенных и высоких температур/ Госстрой СССР.– М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. – 54 с.
13. Чиненков Ю.В. Исследование работы железобетонных элементов при совместном действии изгиба и кручения//Исследование прочности железобетонных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1959. - вып. 5. – С.29-53.
14. Школа А.В., Константинов П.В., Клованич С.Ф. Особенности конечно-элементной аппроксимации отбойных устройств причалов морских портов//Вестник Одесской Госакадемии строительства и архитектуры. –вып.26. – 2007. – С.342-346.
15. Cervenka V. Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panel under inplain loads/ Ph.D.dissirtation, Univ.of Colorado, Dept of Civil Engng, Boulder, Colorado, 1970. – 20 pp.
16. Duddeck H., Griebenon G., Schaper G. Material and time dependent non-linear behavior of cracks concrete slab// Nonlinear behavior of reinforced concrete spatial structures. – v.1.- Priliminary Report, IASS Symp., Darmstadt, 1978.
17. Griffiths D.V. Stability Analysis of Highly Variable Soils by Elasto-Plastic Finite Elements. - Phase 2. User's Guide Version 2.1., 2002.. – 197 pp.
18. G.Kruger Punching tests on RC flat slabs with eccentric loading / G.Kruger, O.Burdet, R.Favre // Budapest: 2nd Int.Ph.D.Symposium in Civil Engineering, 1998. - P. 1-8.
19. Smith M., Griffiths D.V. Programming the Finite Element Method. Third Edition. –John Willey & Sons, 1998. – 534 pp.
20. Weert Z. Das Tragverhalten Belasteter Kugelschaben aus Stahlbeton und Stuhlfaserbeton Unter Gleichzeitiger Wirkung Allgemeiner Temperaturzustante// Tech. - Wiss. Mitt.Inst.Konstr. Ingenieurbau. - Ruhr.Univ., Bochum. - 1984. - Apr. -240 pp.

ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

П.1. Основные понятия линейной алгебры

П.1.1. Линейную алгебру, или теорию матриц, можно справедливо считать арифметикой высшей математики [1]. Хорошо известно, что математическое описание различных задач связано с многочисленными преобразованиями. На этом пути велика опасность, по словам Р.Беллмана, "... потонуть в море арифметических и алгебраических деталей". Очевидно, что система хорошо построенных обозначений позволяет четко выявить математическую сущность задачи, не отвлекая внимание исследователя. С этой точки зрения матрицы являются весьма удобным и эффективным способом описания, так называемых, линейных преобразований, примером которых может служить решение системы линейных алгебраических уравнений.

П.1.2. Матрицей называется совокупность элементов (в частности, чисел, функций) связанных между собой определенным логическим содержанием или физическим смыслом и расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Записываются матрицы в следующем порядке

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{П.1})$$

или сокращенно

$$[A] = [a_{ij}]. \quad (\text{П.2})$$

Каждый элемент матрицы обозначается через a_{ij} , причем первый индекс соответствует номеру строки, второй – номеру столбца ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

П.1.3. Если в матрице $m \neq n$, то она называется прямоугольной матрицей размером $m \times n$. В том случае, когда $m = n$, матрица называется квадратной, а число строк, равное числу столбцов, является ее порядком.

Прямая, соединяющая верхний левый угол с нижним правым, называется главной диагональю, а прямая, соединяющая верхний правый с нижним левым, - побочной диагональю квадратной матрицы.

Если в матрице (П.1) число строк $m = 1$, а $n \neq 1$, то матрица приобретает вид

$$[A] = [a_1 a_2 \dots a_n] \quad (\text{П.3})$$

или

$$[A] = [a_i]. \quad (\text{П.4})$$

и называется матрицей-строкой.

Если $n = 1$, а $m \neq 1$, то матрица называется матрицей-столбцом

$$[A] = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \{A\}. \quad (\text{П.5})$$

Для экономии места при изображении матрицы-столбца часто используется запись вида

$$\{A\} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m\}. \quad (\text{П.6})$$

П.1.4. Матрица-столбец (матрица-строка) рассматривается обычно как m (n) – мерный вектор, компонентами которого в фиксированной системе координат являются элементы данной матрицы. Поэтому, матрицу-столбец (матрицу-строку) принято называть вектор-столбец (вектор-строка), а прямоугольную матрицу представлять как совокупность вектор-столбцов и (или) вектор-строк. В этом смысле матрица представляет собой обобщенное понятие вектора.

П.1.5. Рассмотрим некоторые матрицы, имеющие особые названия.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. любое число можно представить в виде квадратной матрицы первого порядка

$$[a] = a [1]. \quad (\text{П.7})$$

Такая матрица является скаляром.

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля лишь элементы, расположенные вдоль главной диагонали, имеет вид

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad (\text{П.8})$$

и называется диагональной матрицей.

Диагональная матрица, все элементы которой равны между собой ($a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{mn} = a$), называется скалярной.

Если в скалярной матрице элемент a_{mn} равен единице, то матрица называется единичной и обозначается буквой E :

Матрица, все элементы которой равны нулю, является нулевой и обозначается символом $[0]$. Как и другие матрицы, она имеет определенные размеры $m \times n$.

В теории матриц единичная и нулевая матрицы играют роль, аналогичную роли единицы и нуля в обычной алгебре.

Если в квадратной матрице элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой, т.е. имеет место равенство

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (\text{П.9})$$

то матрица называется симметричной.

Квадратная матрица порядка m , у которой отличными от нуля являются элементы, расположенные на главной диагонали и на примыкающих к ней с каждой из сторон (сверху и снизу) k параллельных линиях, называется ленточной $(2k + 1)$ -членной матрицей порядка m .

Если в квадратной матрице элементы, лежащие ниже (выше) главной диагонали, равны нулю, то матрица называется верхней (нижней) треугольной.

П.1.6. В ходе компоновки разрешающих матричных уравнений строительной механики и последующего их решения на ЭВМ появляется необходимость блокирования матриц. С этой целью в матрице $[A]$ проводят несколько горизонтальных и (или) вертикальных линий, идущих вдоль всей матрицы. Примером может служить матрица

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.10})$$

которую можно представить в виде

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & [A_{13}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] & [A_{23}] \end{bmatrix}. \quad (\text{П.11})$$

Элементы матрицы (П.11) сами являются матрицами

$$[A_{11}] = \{a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}\}; \quad [A_{12}] = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}; \quad [A_{13}] = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix};$$

$$[A_{21}] = \{a_{51}a_{61}\}; \quad [A_{22}] = \begin{bmatrix} a_{52} & a_{53} \\ a_{62} & a_{63} \end{bmatrix}; \quad [A_{23}] = \begin{bmatrix} a_{54} & a_{55} \\ a_{64} & a_{65} \end{bmatrix}.$$

В этом случае матрицу $[A]$ называют блочной, а матрицы $[A_{11}]$, $[A_{12}]$, ..., $[A_{23}]$ - подматрицами. Иногда матрицу $[A]$ называют суперматрицей.

Подобно обычным столбцовым, диагональным, ленточным и другим матрицам можно представить и соответствующие блочные, так называемые квазиматрицы, с той лишь разницей, что в них роль элементов играют подматрицы $[A_{ij}]$.

П.1.7. Важную роль в теории квадратных матриц играют их определители или детерминанты. Определитель матрицы составляется из элементов матрицы без изменения их расположения и обозначается символом $\det |A|$. В отличие от матрицы определитель есть число, которое может быть найдено по известным правилам [1].

Когда определитель матрицы $\det |A| = 0$, матрица $[A]$ называется особенной (вырожденной), когда $\det |A| \neq 0$, матрица $[A]$ - неособенная (невырожденная).

П.2. Алгебраические операции над матрицами

П.2.1. Над матрицами могут производиться определенные алгебраические операции, составляющие содержание аппарата исследования линейных преобразований вектором, т.е. решения и анализа системы уравнений, в которых одни величины линейно выражаются через другие. Разумеется, что операции над матрицами должны быть определены не произвольно, а таким образом, чтобы удовлетворить основным свойствам линейных преобразований в наиболее простой форме. Рассмотрим некоторые определения и правила операций над матрицами.

П.2.2. Две матрицы $[A] = [a_{ij}]$, $[B] = [b_{ij}]$ называются равными, если они, имея одинаковые размеры, характеризуются попарным равенством всех соответственно расположенных элементов, т.е., если $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$).

П.2.3. Если в матрице $[A]$ размером $m \times n$ поменять местами строки и столбцы, то получится матрица $[A]^T$ размером $n \times m$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.12})$$

которая называется транспонированной по отношению к матрице $[A]$ (символ T обозначает процедуру транспонирования). В частности, транспонирование матрицы-

столбца дает матрицу-строку, и наоборот. При транспонировании блочной матрицы необходимо поменять местами не только строки и столбцы, элементами которых являются блоки, но и транспонировать каждый из блоков.

П.2.4. Операция «суммирование» определяется только для матриц одинакового размера и понимается в алгебраическом смысле. Суммой двух матриц $[A] = [a_{ij}]$ и $[B] = [b_{ij}]$ называется матрица $[C] = [c_{ij}]$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $[A]$ и $[B]$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (\text{П.13})$$

Сумма матриц подчиняется следующим законам

$$\begin{aligned} [A] + [B] &= [B] + [A]; \\ ([A] + [B]) + [C] &= [A] + ([B] + [C]); \\ [A] + [0] &= [A]; \\ ([A] + [B])^T &= [A]^T + [B]^T. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

П.2.5. Произведение матрицы $[A]$ на скаляр κ дает в результате матрицу $\kappa [A] = [\kappa a_{ij}]$ того же размера, каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента этой матрицы на κ .

Умножение матрицы на скаляр обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} (\kappa + l) [A] &= \kappa [A] + l [A]; \\ \kappa ([A] + [B]) &= \kappa [A] + \kappa [B]; \\ (\kappa l) [A] &= \kappa (l [A]) = l (\kappa [A]); \\ (\kappa [A])^T &= \kappa [A]^T. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

П.2.6. Две матрицы могут быть перемножены только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Произведением матрицы $[A] = [a_{ij}]$ размером $m \times n$ на матрицу $[B] = [b_{jk}]$ размером $n \times l$ называется матрица $[C] = [c_{ik}]$ размером $m \times l$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы $[A]$ на соответствующие элементы κ -го столбца матрицы $[B]$, т.е.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}. \quad (\text{П.16})$$

Матричное умножение не обладает переместительным свойством. Иными словами, умножение матрицы $[A]$ на матрицу $[B]$ справа не равно умножению матрицы $[A]$ на матрицу $[B]$ слева, т.е. $[A] [B] \neq [B] [A]$. Только в исключительных случаях встречаются матрицы, для которых $[A] [B] = [B] [A]$. Такие матрицы называются

перестановочными или коммутативными. В частности, единичная матрица E коммутирует со всякой квадратной матрицей одинакового с ней порядка, т.е.

$$E [A] = [A] E = [A]. \quad (\text{П.17})$$

Произведение матриц подчиняется следующим законам

$$\begin{aligned} ([A] [B]) [C] &= [A] ([B] [C]); \\ [A] ([B] + [C]) &= [A] [B] + [A] [C]; \\ ([A] + [B]) [C] &= [A] [C] + [B] [C]; \\ \kappa ([A] [B]) &= (\kappa [A]) [B] = [A] (\kappa [B]); \\ ([A] [B] [C])^T &= [C]^T [B]^T [A]^T; \\ [A]^k &= \underbrace{[A][A][A]\dots[A]}_{k \text{ раз}} - \text{только для квадратных матриц.} \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

П.2.7. При решении задач строительной механики довольно часто приходится иметь дело с рядом частных случаев умножения матриц, которые рассмотрим более подробно.

Умножение матрицы на матрицу-столбец дает матрицу-столбец

$$\{y\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{Bmatrix}. \quad (\text{П.19})$$

Умножение слева матрицы-столбца на матрицу-строку выражается суммой произведений соответствующих элементов матриц и дает скаляр

$$y = [a_1 a_2 \dots a_n] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = [a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n] = \sum_{j=1}^n a_j x_j. \quad (\text{П.20})$$

Умножение справа матрицы-столбца на матрицу-строку дает матрицу размером $m \times n$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{Bmatrix} [b_1 b_2 \dots b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}. \quad (\text{П.21})$$

Отметим также, что обратная транспонированная матрица равна транспонированной обратной матрице

$$([A]^T)^{-1} = ([A]^{-1})^T. \quad (\text{П.28})$$

П.2.11. Если элементы матрицы $[A]$ представляют собой функции скалярного аргумента x , т.е. $[A] = [a_{ij}(x)]$, то производная этой матрицы $\frac{d}{dx}([A])$, если она существует, определится как матрица, у которой каждый элемент является производной по x соответствующего элемента матрицы $[A]$

$$\frac{d}{dx}([A]) = \left[\frac{d}{dx} a_{ij}(x) \right]. \quad (\text{П.29})$$

П.2.12. Производная от функции нескольких аргументов $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по вектор-столбцу, элементами которого являются эти аргументы, $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ определяется как вектор-столбец

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \{x\}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{array} \right\}. \quad (\text{П.30})$$

Если функция представляет собой вектор-столбец $\{\varphi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, то дифференцирование ее по вектору $\{x\}$ будет иметь вид

$$\frac{\partial \{\varphi\}}{\partial \{x\}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{array} \right\} \{\varphi\}^T. \quad (\text{П.31})$$

Получится квадратная матрица, определитель которой называется якобианом.

П.2.13. Проинтегрировать матрицу $[A] = [a_{ij}(x)]$, элементами которой являются функции скалярного аргумента x , значит проинтегрировать каждый элемент этой матрицы

$$\int [A] dx = \left[\int a_{ij}(x) dx \right]. \quad (\text{П.32})$$

Интеграл (П.32) существует, если существуют интегралы каждого элемента матрицы $[A]$.

П.2.14. Общие операции распространяются и на блочные матрицы. Только в этом случае, правила матричных операций применяют сначала к этим матрицам так, как будто подматрицы являются скалярными, а затем производят дальнейшие операции над подматрицами обычным путем. Естественно, операции над ними должны иметь смысл. Например, при перемножении блочных матриц число столбцов в подматрице $[A_{ij}]$ должно быть равно числу строк в соответственной подматрице $[B_{jk}]$.

П.3. Элементы вариационного исчисления

П.3.1. Вариационное исчисление – это раздел высшей математики, в котором изучаются методы нахождения функций, сообщающих максимальное, минимальное или стационарное значение функционалу, т.е. переменной величине, значение которой определяется выбором одной или нескольких функций [2,3,8]. Простейшим примером функционала может быть длина дуги плоской кривой, соединяющей две заданные точки. Очевидно, что каждой кривой соответствует своя длина дуги. В механике функционалами являются моменты инерции и статические моменты сечений, энергия деформирования и т.д.

К задачам вариационного исчисления сводится большинство проблем физики и механики, поскольку, по словам одного из основателей вариационного исчисления Л.Эйлера, “...все явления природы следуют какому-либо закону максимума или минимума” [11]. Физические законы, согласно которым некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать экстремального значения, называются вариационными принципами. Примерами могут служить закон сохранения энергии, принципы Лагранжа и Кастильяно в механике, принцип Ферма в оптике и т.д.

П.3.2. В вариационном исчислении важнейшую роль играет понятие вариации. Пусть имеется функционал

$$J = J [y(x)]. \quad (\text{П.33})$$

Каждой функции $y(x)$ отвечает свое значение функционала $J[y(x)]$. Приращением или вариацией δy называется разность между двумя функциями $y(x)$, меняющимися произвольно в определенном классе при одном и том же значении аргумента x

$$\delta y = y(x) - y_1(x). \quad (\text{П.34})$$

Если функционал (П.33) непрерывен, то его приращение имеет вид

$$\Delta J = J(y + \delta y) - J(y) \approx \delta J(y, \delta y). \quad (\text{П.35})$$

Главная, линейная по отношению к δy часть приращения

$$\delta J = \delta J(y, \delta y), \quad (\text{П.36})$$

называется вариацией функционала.

В исследовании функционалов вариация играет ту же роль, что и дифференциал при исследовании функций. При этом для оператора варьирования δ можно принять те же правила, что и для оператора d в дифференциальном исчислении. Это означает, в частности, что справедливы соотношения

$$\delta \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \delta u; \quad u \delta u = \delta \frac{u^2}{2}; \quad \delta(uv) = u \delta v + v \delta u; \quad (\text{П.37})$$

$$\delta u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z;$$

$$\delta J = \delta \left[\int F(x, y) dx \right] = \int \delta F(x, y) dx.$$

Понятие вариации имеет также вполне определенный физический смысл. Так, если J – энергия деформирования, то δJ – ее приращение. Причем, символ δ отвечает возможному приращению (вариации), а символ d (или ∂) – действительному.

П.3.3. Из определения приращения функционала (П.35) непосредственно следует, что вариация его δJ в силу своей линейности по отношению к δy при переходе через экстремальное значение J_{max} либо J_{min} изменяет знак на противоположный. Тогда по аналогии с задачами на максимум (минимум) функции необходимое условие стационарности функционала запишется в виде

$$\delta J = 0. \quad (\text{П.38})$$

В механике довольно часто функционал может зависеть не только от искомой функции, реализующей его стационарное значение, но также от ее производных 1, 2, ..., k порядка. Более того, он нередко зависит от нескольких функциональных аргументов, каждый из которых может быть функцией нескольких независимых переменных. Очевидно, что необходимое условие экстремума будет также иметь вид (П.38).

П.3.4. Рассмотрим в качестве примера использование условия (П.38) для нахождения независимых функций $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$, сообщающих экстремальное значение функционалу

$$J = \iiint_V F(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z, v, v'_x, v'_y, v'_z) dV, \quad (\text{П.39})$$

где

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u'_y = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad u'_z = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad v'_x = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad v'_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad v'_z = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

С учетом соотношений (П.36), условие (П.37) для функционала (П.39) будет иметь вид

$$\delta J = \iiint_V \delta F(x, y, z, u, \dots, v'_z) dV = 0. \quad (\text{П.40})$$

Имея в виду соотношения (П.37), условие (П.40) запишем так

$$\delta J = \iiint_V \delta F(x, y, z, u, \dots, v'_z) dV = \iiint_V \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'_x} \delta u'_x + \dots + \frac{\partial F}{\partial v'_z} \delta v'_z \right) dV = 0.$$

Используя правило дифференцирования по частям для каждого из слагаемых в подынтегральном выражении, содержащих производные искомых функций u и v , применяя известную формулу Остроградского-Гаусса [7]

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} P(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} R(x, y, z) \right] dV = \iint_S [P(x, y, z)n_x + Q(x, y, z)n_y + R(x, y, z)n_z] dS,$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – некоторые непрерывные в области V функции; $n_x = \cos(n, x)$, $n_y = \cos(n, y)$, $n_z = \cos(n, z)$ – направляющие косинусы нормали n к поверхности S , ограничивающей объем V , получим

$$\begin{aligned} \delta J = & \iiint_V \delta u \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial u'_z} \right) dV + \\ & + \iiint_V \delta v \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial v'_z} \right) dV + \\ & + \iint_{S_2} \delta u \left(n_x \frac{\partial F}{\partial u'_x} + n_y \frac{\partial F}{\partial u'_y} + n_z \frac{\partial F}{\partial u'_z} \right) dS + \iint_{S_2} \delta v \left(n_x \frac{\partial F}{\partial v'_x} + n_y \frac{\partial F}{\partial v'_y} + n_z \frac{\partial F}{\partial v'_z} \right) dS = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.41})$$

Поверхностные интегралы в данном случае берутся только по той части поверхности S_2 , где функции u и v не заданы, поскольку для остальной части $\delta u = \delta v = 0$.

В силу независимости функций u и v , а также произвольности их вариаций из выражения (П.41) получим так называемые уравнения Эйлера в области V

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial u'_z} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial v'_z} = 0 \quad (\text{П.42})$$

и естественные граничные условия на части поверхности S_2

$$n_x \frac{\partial F}{\partial u'_x} + n_y \frac{\partial F}{\partial u'_y} + n_z \frac{\partial F}{\partial u'_z}; \quad n_x \frac{\partial F}{\partial v'_x} + n_y \frac{\partial F}{\partial v'_y} + n_z \frac{\partial F}{\partial v'_z} = 0. \quad (\text{П.43})$$

Таким образом, задача об отыскании функций u и v , реализующих стационарное значение функционала (П.40), свелась к нахождению их из системы дифференциальных уравнений (П.42) при граничных условиях (П.43).

Приведенные выкладки нетрудно обобщить на случаи, когда в выражение для функционала входят производные более высоких порядков.

П.3.5. Рассмотренный тип задач вариационного исчисления относят к, так называемым, свободным вариационным задачам или задачам на безусловный экстремум функционала, т.е. когда функциональные аргументы являются независимыми друг от друга функциями.

В конкретных задачах вариационного исчисления на функции, реализующие стационарное значение функционала, иногда накладываются некоторые дополнительные условия – уравнения связи. В этом случае говорят о несвободной вариационной задаче или задаче на условный экстремум.

Например, требуется исследовать на максимум (минимум) функционал (П.40) при наличии дополнительного условия

$$G(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z, v, v'_x, v'_y, v'_z) = 0. \quad (\text{П.44})$$

Непосредственный переход от вариационной задачи к эквивалентным дифференциальным уравнения Эйлера в данном случае совершить нельзя, поскольку вариации δu и δv не произвольны, а подчинены уравнению связи (П.44). Решение подобной задачи можно найти следующим образом. Варьируя уравнение (П.44), получим

$$\frac{\partial G}{\partial u} \delta u + \frac{\partial G}{\partial u'_x} \delta u'_x + \frac{\partial G}{\partial u'_y} \delta u'_y + \frac{\partial G}{\partial u'_z} \delta u'_z + \dots + \frac{\partial G}{\partial v'_z} \delta v'_z. \quad (\text{П.45})$$

Умножая почленно (П.45) на некоторый множитель $\lambda(x, y, z)$ и интегрируя далее по v с использованием соотношений (П.38) и формулы Остроградского-Гаусса, будем иметь

$$\iiint \lambda \left[\delta u \left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial u'_z} \right) + \delta v \left(\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial v'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial v'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial v'_z} \right) \right] dV +$$

$$+ \iint_{S_2} \lambda \left[\delta u \left(n_x \frac{\partial G}{\partial u'_x} + n_y \frac{\partial G}{\partial u'_y} + n_z \frac{\partial G}{\partial u'_z} \right) + \delta v \left(n_x \frac{\partial G}{\partial v'_x} + n_y \frac{\partial G}{\partial v'_y} + n_z \frac{\partial G}{\partial v'_z} \right) \right] dS = 0. \quad (\text{П.46})$$

Суммируя (П.46) и (П.41), получим

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta u \left[\frac{\partial}{\partial u} (F + \lambda G) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u'_x} (F + \lambda G) - \dots \right] dv + \iiint_V \delta v \left[\frac{\partial}{\partial v} (F + \lambda G) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v'_x} (F + \lambda G) - \dots \right] dv + \\ \iint_{S_2} \delta u \left[n_x \frac{\partial}{\partial u'_x} (F + \lambda G) + \dots \right] dS + \iint_{S_2} \delta v \left[n_x \frac{\partial}{\partial v'_x} (F + \lambda G) + \dots \right] dS = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.47})$$

Если теперь ввести новую функцию

$$F^* = F + \lambda G, \quad (\text{П.48})$$

то необходимое условие экстремума запишется в виде (П.40), где функция F заменена функцией F^* . В этом случае вариации δu и δv становятся произвольными. Следовательно, из формулы (П.48) можно получить уравнения Эйлера для функционала (П.40) с дополнительными условиями (П.44):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F^*}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F^*}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F^*}{\partial u'_z} = 0; \quad \frac{\partial F^*}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F^*}{\partial v'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F^*}{\partial v'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F^*}{\partial v'_z} = 0; \\ n_x \frac{\partial F^*}{\partial u'_x} + n_y \frac{\partial F^*}{\partial u'_y} + n_z \frac{\partial F^*}{\partial u'_z} = 0; \quad n_x \frac{\partial F^*}{\partial v'_x} + n_y \frac{\partial F^*}{\partial v'_y} + n_z \frac{\partial F^*}{\partial v'_z} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.49})$$

Таким образом, вариационная задача для функционала (П.40) с дополнительным условием (П.44) равносильна задаче на безусловный экстремум функционала

$$J^* = \iiint_V (F + \lambda G) dv. \quad (\text{П.50})$$

Функция $\lambda(x, y, z)$ носит название множителя Лагранжа, а метод нахождения условного экстремума называется методом неопределенных множителей Лагранжа [4].

Для любого числа связей типа (П.44) исследование условного экстремума проводится совершенно аналогично. Так, если отыскивается экстремум функционала (П.40) при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} G_1(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z, v, v'_x, v'_y, v'_z) = 0; \\ G_2(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z, v, v'_x, v'_y, v'_z) = 0; \\ \dots \dots \dots \\ G_n(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z, v, v'_x, v'_y, v'_z) = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.51})$$

то надо поступать так, как если бы мы искали безусловный экстремум функционала

$$J^* = \iiint_V (F + \{\lambda\}^T \{G\}) dv, \quad (\text{П.52})$$

где $\{G\} = \{G_1 G_2 \dots G_n\}$ - вектор-столбец дополнительных условий (П.51);
 $\{\lambda\} = \{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n\}$ - вектор-столбец неопределенных множителей Лагранжа.

П.3.6. Переход от вариационной задачи к эквивалентным дифференциальным уравнениям Эйлера сводит ее решение к интегрированию сложной системы уравнений в частных производных. Хорошо известны серьезные математические трудности получения точных решений задач такого класса. Это послужило причиной разработки так называемых прямых методов решения вариационных задач без сведения их к системе дифференциальных уравнений.

Сущность этих методов в том [6], что функционал $J[u(x,y,z)]$ можно рассматривать как функцию бесконечного множества переменных, если считать, что допустимые функции $u(x,y,z)$ представлены в виде степенного ряда, ряда Фурье или вообще какого-либо ряда

$$u(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x, y, z), \quad (\text{П.53})$$

где $\psi_k(x,y,z)$ – заданные функции.

Следовательно, значение функционала $J[u(x,y,z)]$ полностью определяется заданием бесконечной последовательности чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, т.е.

$$J = f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots). \quad (\text{П.54})$$

Вариационную задачу при этом можно рассматривать как предельную для задачи на экстремум функции конечного числа переменных.

Существуют различные модификации прямых методов. В качестве иллюстрации, остановимся на методе Ритца.

Согласно этому методу, значения функционала $J[u(x,y,z)]$ рассматриваются на линейных комбинациях $u(x,y,z)$ вида

$$u(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x, y, z) \quad (\text{П.55})$$

или в матричной форме

$$u = \{\varphi\}^T \{\alpha\}, \quad (\text{П.56})$$

где α_k – постоянные коэффициенты; φ_k – допустимые функции задачи, что налагает на них определенные ограничения.

Как правило, на функции $\varphi_k(x,y,z)$ накладываются требования непрерывности и гладкости. Кроме того, они должны удовлетворять граничным условиям. Отметим, что $\varphi_k(x,y,z)$ нередко называют координатными функциями.

Очевидно, что на линейных комбинациях (П.55) функционал $J[u(x,y,z)]$ становится функцией коэффициентов α_k

$$J = f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n), \quad (\text{П.57})$$

которые находятся из системы уравнений

$$\frac{df}{d\alpha_k} = 0. \quad (\text{П.58})$$

Предельный переход при $n \rightarrow \infty$ дает точное решение задачи, а если ограничиться несколькими членами в (П.55), то решение будет приближенным.

Решение системы уравнений (П.58) является сложной задачей. Она существенно упрощается, если уравнения (П.56) линейны относительно α_k . Так бывает в случае квадратичного относительно функции $u(x,y,z)$ и ее производных функционала $J(u)$. Именно с задачами этого вида приходится иметь дело в механике деформируемого твердого тела. На сложность вычислений и точность решения существенно влияет вид координатных функций $\varphi_k(x,y,z)$. В работе С.Г.Михлина [6] детально исследованы вопросы сходимости приближенных решений по методу Ритца и дана оценка степени их точности.

П.4. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений

П.4.1. В общем виде система нелинейных алгебраических уравнений может быть представлена так

$$F(\{x\}) = [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (\text{П.59})$$

Причем, число неизвестных, представленных вектором столбцом $\{x\} = \{x_1 x_2 \dots x_n\}$, должно быть равно числу уравнений в системе n .

Для решения системы вида (П.59) существует широкий выбор различных итерационных методов, основы которых заложены еще в работах Ньютона.

Допустим, что известен вектор-столбец, являющийся k -ым приближением к корню этого уравнения $\{x^k\} = \{x_1^k x_2^k \dots x_n^k\}$. Тогда искомое решение можно представить так $\{x\} = \{x^k\} + \{dx\}$, где $\{dx\}$ - вектор-столбец погрешностей k -го приближения размерностью n . Исходное уравнение преобразуется к виду $F(\{x^k\} + \{dx\}) = 0$. Теперь используя разложение в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами, можно записать

$$F(\{x^k\} + \{dx\}) \approx F(\{x^k\}) + F'(\{x^k\})\{dx\} \approx 0,$$

где

$$F'(\{x^k\}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = [J^k] \text{ – матрица Якоби.}$$

Если матрица $[J^k]$ существует и неособенная, то вектор погрешностей равен $\{dx\} = -[J^k]^{-1} F(\{x^k\})$. Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле

$$\{x^{k+1}\} = \{x^k\} - [J^k]^{-1} F(\{x^k\}), (k = 1, 2, \dots). \quad (\text{П.60})$$

Изложенный метод носит название метода Ньютона-Рафсона. Заметим, что за так называемое «нулевое» приближение обычно принимается грубое решение системы, которое находится, например, из физического смысла задачи (пример – упругое решение для физически нелинейной задачи)

П.4.2. Если на каждой итерации использовать некоторое постоянное значение матрицы Якоби, например $[J^0]$, то процедура носит название метода Ньютона-Канторовича и процесс последовательных приближений будет выглядеть так

$$\{x^{k+1}\} = \{x^k\} - [J^0]^{-1} F(\{x^k\}), (k = 1, 2, \dots), \quad (\text{П.61})$$

Естественно, что метод Ньютона-Канторовича требует большего числа итераций, хотя в целом он может оказаться более экономичным, т.к. матрица Якоби обращается в данном случае всего один раз.

П.4.3. Если систему нелинейных уравнений (П.59), определенную и непрерывную в окрестностях искомого решения, можно переписать в равносильной форме $\{x\} = \Phi(\{x\})$, то для нахождения корня можно использовать метод простых итераций

$$\{x^{k+1}\} = \Phi(\{x^k\}). \quad (\text{П.62})$$

Принимая во внимание, что вектор-функция $\Phi(\{x\})$ разыскивается при этом в виде $\Phi(\{x\}) = \{x\} + \Lambda F(\{x\})$, где Λ - неособенная матрица, причем $\Lambda = [J]^{-1}$, придем, в сущности, к методу Ньютона-Рафсона для уравнения (П.59).

П.4.4. Изложенные методы приводят к довольно быстро сходящимся процессам, если нулевое приближение лежит достаточно близко от искомого решения. Однако, следует учитывать, что в нелинейных задач иногда имеется несколько изолированных корней, поэтому найденное решение не всегда будет искомым. Для получения правильного ответа необходимо применять метод малых приращений и четко представлять физическую сущность задач.

П.5. Одномерная интерполяция

П.5.1. Как известно [10], под интерполяцией понимают отыскание аналитического выражения для функции в заданном интервале, когда известны лишь некоторые ее значения в пределах этого интервала. Другими словами, если неизвестная функция задана в табличном виде n значениями, определенными точками с координатами по оси x , равными $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и по оси y $\{y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, то необходимо подобрать функцию $y = f(x)$ такую, чтобы ее график проходил через все эти точки.

Наиболее простым видом интерполяции является интерполяция полиномом степени $n-1$, т.е, когда искомая функция задается в виде

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}, \quad (\text{П.63})$$

Подстановкой в это выражение известных значений функций в k точках, придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, которая в матричном виде представляется так

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{Bmatrix},$$

или $\{y\} = [B]\{a\}$.

Решение этой системы $\{a\} = [B]^{-1}\{y\}$ дает возможность установить неизвестные коэффициенты в (П.63).

П.5.2. Непосредственно интерполяция вида (П.63) довольно редко используется в технических приложениях, т.к. (П.63) очень часто приводит к плохо обусловленной системе уравнений, особенно, когда интерполируются значения, лежащие на одной прямой [9]. Гораздо более удовлетворительный способ - интерполяция с помощью многочленов специальных видов, как правило, лучше отражающих физическую сущность явления, описываемое интерполяционной функцией и не приводящий к необходимости решения больших систем уравнений. В общем виде интерполяционный многочлен представляется так

$$y(x) = N_1(x)y_1 + N_2(x)y_2 + \dots + N_k(x)y_n = \sum_{i=1}^n N_i(x)y_i, \quad (\text{П.64})$$

где $N_n(x)$ - базисные функции, обладающие следующим свойством

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}. \quad (\text{П.65})$$

Т.е. значение базисной функции для узла интерполяции равно единице в этом узле и нулю во всех остальных. В качестве базисных функций используют полиномы, степень каждого из которых равна n . Таким свойством обладает, например, полином Лагранжа, который имеет вид

$$N_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (\text{П.66})$$

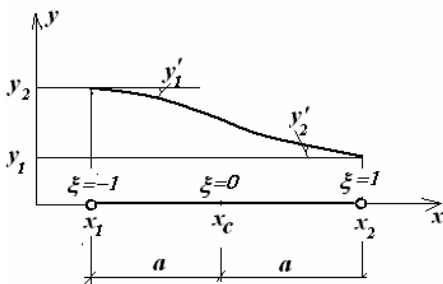


Рис. П.1. Нормализованные координаты и узловые значения.

Выражение (П.63) является частным случаем соотношения (П.65), когда базисные функции равны $N_1 = 1$, $N_2 = x$, $N_3 = x^2$, ... и т.д.

Существуют также и другие способы интерполяции, в которых базисные функции удовлетворяют основному условию (П.65), среди них интерполяция Ньютона, Стирлинга и т.д.

П.5.3. Часто требуется найти интерполяционный многочлен для функции $y = f(x)$, когда в узлах интерполяции $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ известны не только значения функций, но и ее производных $\{y'\} = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_n\}$. Такая проблема возникает, например, при изучении задач изгиба. В этом случае используется также многочлены вида (П.64), естественно с другими, специфическими, базисными функциями. В качестве базисных функций обычно выбирают многочлены степени $2n-1$. Рассмотрим частный случай интерполяции на отрезке длиной 2, когда на концах этого отрезка с координатами

x_1 и x_2 известны значения функции y_1, y_2 и ее первой производной y_1' и y_2' (рис.П.1). Для этой задачи удобно использовать нормализованную, объектную координату $\xi = \frac{x - x_c}{a}$, которая на концах отрезка принимает значения ∓ 1 . Интерполяционный многочлен (П.64) будет иметь вид

$$y(\xi) = N_1(\xi)y_1 + \bar{N}_1(\xi)y_1' + N_2(\xi)y_2 + \bar{N}_2(\xi)y_2'. \quad (\text{П.67})$$

Базисные функции для этой задачи $N_i(\xi)$ и $\bar{N}_i(\xi)$ ($i=1,2$) должны удовлетворять условию (П.65), что предполагает их описание полиномом третьей степени.

$$N(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3, \quad (\text{П.68})$$

где постоянные могут быть найдены из условий в узлах интерполяции. Опуская промежуточные выкладки, запишем

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}; & \bar{N}_1(\xi) &= \frac{a}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1); \\ N_2(\xi) &= -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}; & \bar{N}_2(\xi) &= \frac{a}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \end{aligned} \quad (\text{П.69})$$

Полиномы (П.69) носят название полиномов Эрмита. Эти полиномы могут быть записаны в следующей форме

$$N_k(\xi) = -\frac{1}{4}\xi_k\xi^3 + \frac{3}{4}\xi_k\xi + \frac{1}{2}; \quad \bar{N}_k(\xi) = \frac{a}{4}(\xi^3 + \xi_k\xi^2 - \xi - \xi_k), \quad k=1,2 \quad (\text{П.70})$$

П.6. Численное интегрирование

П.6.1. Часто приходится вычислять значение определенного интеграла численно. Это бывает в тех случаях, когда не удастся выразить интеграл в замкнутой форме, либо она настолько сложна, что проще воспользоваться численным интегрированием, либо вообще отсутствует выражение для подынтегральной функции и она задана таблично. Ставится задача найти численное приближение к определенному интегралу

$$I = \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx, \quad (\text{П.71})$$

где $f(x)$ = заданная функция (аналитически или таблично).

Основой численного интегрирования является приближенное определение площади под кривой, описываемой подынтегральной функцией. Для этого весь интервал (a_1, a_2) разбивается на n подинтервалов $a_1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = a_2$. Интеграл (П.71) заменяется суммой

$$I \approx \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n H_i f(x_i), \quad (\text{П.72})$$

где $f(x_i)$ - значение подынтегральной функции в точке (узле) x_i ; H_i - весовые множители, которые зависят только от узлов, но не зависят от вида функции $f(x)$. Формула (П.72) носит название квадратурной, а операция определения определенного интеграла – квадратура.

Методы численного интегрирования классифицируются в зависимости от того, заданы ли значения аргумента через равные интервалы или нет.

П.6.2. Методы численного интегрирования, основанные на равномерном разбиении интервала, приводят к следующим квадратурным формулам.

Формулы левых, правых или средних прямоугольников:

$$I = I_l \approx H_i \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad I = I_n \approx H_i \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad I = I_c \approx H_i \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \quad (\text{П.73})$$

с весовыми множителями $h_i = \frac{(b-a)}{n}$.

Формула трапеций:

$$I \approx H_i \sum_{i=1}^n [f(x_i) + f(x_{i+1})], \quad (\text{П.74})$$

с весовыми множителями $H_i = \frac{(b-a)}{2n}$.

Формула Симпсона:

$$I \approx H_i \sum_{i=1}^n \left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right], \quad (\text{П.75})$$

с весовыми множителями $H_i = \frac{(b-a)}{6n}$.

П.6.3. Среди формул, основанных на неравномерном разбиении интервала интегрирования, наибольшей популярностью пользуется формула Гаусса. Интервал (a_1, a_2) нормализуется, т.е. координата x заменяется на $\xi = \frac{x - x_c}{a}$ (рис.П.1), а интеграл (П.71) представляется в новых переменных так

$$I = aJ = a \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi, \quad (\text{П.76})$$

где a – половина длины интервала (a_1, a_2) . Интеграл же J в нормализованных координатах представляется так

$$J = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i). \quad (\text{П.77})$$

Координаты точек интегрирования и соответствующие им значения весовых коэффициентов для формулы (П.77) в зависимости от числа этих точек представляются таблицей

Координаты и веса квадратурной формулы Гаусса

Таблица П.1.

n	ξ	H	n	ξ	H
2	± 0.577350269	1.000000000	7	± 0.949107912 ± 0.741531185 ± 0.405845151 0.000000000	0.1294849661 0.2797053914 0.3818300505 0.4179591836
3	± 0.774596669 0.000000000	0.555555555 0.888888888	8	± 0.960289856 ± 0.796666477 ± 0.525532409 ± 0.183434624	0.1012285362 0.2223810344 0.3137066458 0.3626837833
4	± 0.861136312 ± 0.339981046	0.3478548451 0.6521451548	9	± 0.968160239 ± 0.836031107 ± 0.613371432 ± 0.324253223 0.000000000	0.0812743883 0.1806481606 0.2606106964 0.3123470770 0.3302393550
5	± 0.906179846 ± 0.538469310 0.000000000	0.2369268850 0.4786286704 0.5688888888	10	± 0.9739065285 ± 0.8650633666 ± 0.6794095682 ± 0.4333953941 ± 0.1488743389	0.0666713443 0.1494513491 0.2190863625 0.2692667193 0.2955242247
6	± 0.932246951 ± 0.661209386 ± 0.238619186	0.1713244923 0.3607615730 0.4679139345			

П.7. Сведения из векторной алгебры

П.7.1. Для получения характеристик элементов, ориентированных произвольно в пространстве, таких как, например, стержневые, оболочечные, преобразование координат осуществляется с помощью методов векторной алгебры.

Приведем необходимые сведения из этого раздела математики [5].

Вектор может быть представлен своими проекциями на оси координат следующим образом (рис.П.2)

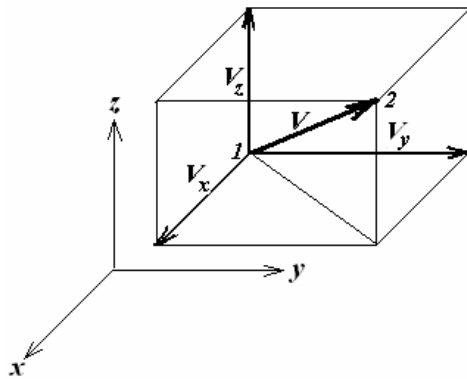


Рис.П.2. Проекция вектора на координатные оси.

$$\vec{V} = \{V\} = \{V_x \ V_y \ V_z\}, \quad (\text{П.78})$$

Проекция вектора (П.78) выражается через координаты $\{x\}_1$ и $\{x\}_2$ начала и конца вектора $V_x = x_2 - x_1; V_y = y_2 - y_1; V_z = z_2 - z_1$.

Вектор $\{V\}$, как известно характеризуется длиной и направлением.

Длина или модуль вектора равна

$$l_v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad (\text{П.79})$$

а направление задается направляющими косинусами

$$n_{vx} = \cos \alpha_x = \frac{V_x}{l_v}; \quad n_{vy} = \cos \alpha_y = \frac{V_y}{l_v}; \quad n_{vz} = \cos \alpha_z = \frac{V_z}{l_v}, \quad (\text{П.80})$$

где $\alpha_{vx}, \alpha_{vy}, \alpha_{vz}$ - углы между вектором V и осями координат x, y, z . При этом, направляющие косинусы должны удовлетворять следующему соотношению

$$n_{vx}^2 + n_{vy}^2 + n_{vz}^2 = 1.$$

П.7.2. При замене системы прямоугольной декартовой системы координат x, y, z новой системой x', y', z' , новые проекции вектора $\{V'\} = \{V'_x \ V'_y \ V'_z\}$ можно выразить через старые (П.78) следующим образом

$$\{V'\} = [H]\{V\}, \quad (\text{П.81})$$

где $[H]$ - квадратная матрица преобразования координат размером 3×3 , содержащая направляющие косинусы и равная

$$[H] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь m_{ij} - косинус угла между новой осью i ($i=x', y', z'$) и старой осью j ($j=x, y, z$).

Направляющие косинусы удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^3 m_{ik} m_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Обратное преобразование

$$\{V\} = [H]^{-1} \{V'\} = [H]^T \{V'\}. \quad (\text{П.82})$$

П.7.3. Скалярным произведением двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = l_a \cdot l_b \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B}).$$

Скалярное произведение может быть записано в виде произведения проекций

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \{A\}^T \{B\} = \{B\}^T \{A\}. \quad (\text{П.83})$$

П.7.4. Векторное произведение векторов $\vec{A} \times \vec{B}$ есть тоже вектор \vec{C} , направленный по нормали к плоскости действия векторов-сомножителей, и равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Направление вектора-произведения определяется по правилу правой руки, т.е.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}.$$

В матричной алгебре под векторным произведением понимают следующий вектор

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = \{C\} = \begin{Bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{Bmatrix}. \quad (\text{П.84})$$

Векторное произведение используется при построении нормали к поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 351 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973. – 190 с.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.1. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951.
5. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
6. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике. – М.: Гостехиздат, 1950.

7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. II, - М.: Наука, 1974. – 665 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. I. - М.: Наука, 1974. – 336 с.
9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
10. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
11. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. – М.-Л., 1934. – С. 573-574.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРА	3
ПРЕДИСЛОВИЕ.	4
ГЛАВА 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ	8
1.1. Расчет конструкций – задача механики деформируемого твердого тела	8
1.2. Вариационные принципы механики	12
1.3. Элементы теории напряжений и деформаций	23
Литература	31
ГЛАВА 2. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.	32
2.1. Предварительные соображения	32
2.2. Конечные элементы	37
2.3. Узловые силы от внешних воздействий	43
2.4. Разрешающее уравнение МКЭ	47
2.5. Решение нелинейных задач	53
2.6. Формулировка динамических задач	59
Литература	63
ГЛАВА 3. СТАНДАРТНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ .	64
3.1. Треугольные элементы	64
3.2. Четырехугольные элементы	77
3.3. Криволинейные элементы	83
Литература	91
ГЛАВА 4. СТАНДАРТНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ	92
4.1. Элемент в виде тетраэдра	92
4.2. Элемент в виде параллелепипеда	97
4.3. Криволинейные объемные элементы.	102
4.4. Осесимметричные элементы	112
Литература	119
ГЛАВА 5. ИЗГИБАЕМЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ	120
5.1. Основные соотношения теории плит	120
5.2. Конечные элементы для плит средней толщины	126
5.3. Конечные элементы тонких плит	132
5.4. Тонкие оболочки	153
5.5. Стержневые элементы	161
Литература	170
ГЛАВА 6. АНИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ БЕТОНА И ЖЕЛЕЗОБЕТОНА	172
6.1. Ортотропная модель бетона	172
6.2. Прочность бетона	180
6.3. Железобетон без трещин	186
6.4. Железобетон с трещинами	190

Литература	201
ГЛАВА 7. ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ.	206
7.1. Теории течения. Основные положения	206
7.2. Вариант ассоциированной теории течения бетона	214
7.3. Теории течения грунта	218
7.4. Деформационные модели	229
Литература	240
ГЛАВА 8. НЕСТАНДАРТНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ	244
8.1. Элементы толстых оболочек	244
8.2. Неоднородные конечные элементы	251
8.3. Контактные элементы	261
8.4. Полубесконечные элементы	267
Литература	271
ГЛАВА 9. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ	273
9.1. Предварительные замечания	273
9.2. Вычислительная программа метода конечных элементов	276
9.3. Автоматизация подготовки исходных данных	305
9.4. Визуализация результатов расчета	321
Литература	328
ГЛАВА 10. ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ	331
10.1. Плосконапряженные железобетонные конструкции	341
10.2. Пространственные конструкции, плиты, оболочки	347
10.3. Геотехнические задачи	355
Литература	366
ПРИЛОЖЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ.	367
П.1. Основные понятия линейной алгебры	367
П.2. Алгебраические операции над матрицами	370
П.3. Элементы вариационного исчисления	376
П.4. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений	382
П.5. Одномерная интерполяция.	384
П.6. Численное интегрирование	386
П.7. Сведения из векторной алгебры	388
Литература	390



Клованич Сергей Федорович, профессор, д.т.н. по специальности 05.23.01 - "Строительные конструкции, здания и сооружения". Диссертация на тему "Модель деформирования железобетона и расчет конструкций при сложном напряженном состоянии и нагреве" защищена в 1990 г. в Научно-исследовательском институте бетона и железобетона (НИИЖБ) Госстроя СССР. Направление научных интересов - моделирование работы бетона и железобетона при сложном напряженном состоянии, численные исследования железобетонных конструкций, теоретические и прикладные аспекты метода конечных элементов, нелинейные расчеты на основе МКЭ. В настоящее время - заведующий кафедрой инженерных конструкций и водных исследований Одесского национального морского университета. Автор 150 научных публикаций.

E-Mail: scotch@te.ne.ua
<http://klovaniich.se-ua.net>